

CAEPIA 2026

ESTYLF

CONGRESO ESPAÑOL • SOFT COMPUTING & FUZZY LOGIC

11•13 NOV 2026 UNIVERSIDAD DE JAEN



Libro de resúmenes del XXIV Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy – ESTYLF 2026

Trabajos en curso. Jaén, 11–13 de noviembre de 2026

Universidad de Jaén

AEPIA
ASOCIACIÓN ESPAÑOLA PARA LA INTELIGENCIA ARTIFICIAL



Libro de resúmenes del XXIV Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy – ESTYLF 2026

Antigua Escuela de Magisterio de Jaén. Universidad de Jaén

Jaén, España

11-13 de noviembre de 2026

Publicador por:
Universidad de Jaén
http:https://simidat.ujaen.es/caepia26/conferencias/estylf

ISBN: 978-84-09-92828-6

Credits:
Portada: Luis Jiménez Jiménez & Juan Moreno García
LaTeX editores: Macarena Espinilla Estévez, Luis Jiménez Linares, Luis Magdalena Layos y Juan Moreno García
Actas generadas con LaTeX's 'confproc' package, version 0.8 (optional: by V. Verfaille)

Bienvenida

En nombre del Comité Organizador, os damos la bienvenida al **XXIV Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF 2026)**, que se celebra del **11 al 13 de noviembre de 2026 en Jaén**, organizado por la Universidad de Jaén.

Jaén, tierra de historia, cultura y tradición, y con una creciente apuesta por la investigación, la tecnología y la innovación, acoge con gran ilusión esta nueva edición del congreso. Esperamos que estos días constituyan una excelente oportunidad para compartir conocimientos, intercambiar experiencias y fortalecer los vínculos entre los miembros de nuestra comunidad científica.

Como en ediciones anteriores, ESTYLF 2026 pretende ser un foro de encuentro y debate sobre el presente y el futuro de las tecnologías y la lógica fuzzy en el ámbito de la Inteligencia Artificial, favoreciendo el intercambio de ideas, la colaboración entre investigadoras e investigadores y el impulso de nuevas líneas de investigación que contribuyan al avance científico y tecnológico y aporten soluciones útiles a la sociedad.

La presente publicación recoge los resúmenes de los trabajos en curso (Ongoing Works) presentados en ESTYLF 2026. Por su parte, los trabajos destacados (Key Works) y los trabajos completos (Long Papers) se encuentran recogidos en las actas del Congreso Español de Inteligencia Artificial (CAEPIA 2026), celebrado ESTYLF 2026 como congreso federado.

Queremos expresar nuestro agradecimiento a los patrocinadores y entidades colaboradoras, cuyo apoyo ha sido fundamental para hacer posible la celebración de este encuentro, así como a todas las personas que han contribuido a su organización.

Esperamos que disfrutéis de las conferencias plenarias, las sesiones científicas y las actividades programadas y, por supuesto, del programa social que hemos preparado con especial ilusión para que también tengáis la oportunidad de conocer y disfrutar de nuestra ciudad.

¡Bienvenidos a Jaén y a ESTYLF 2026!

Comités

Comité Local

Investigador	Institución
María José del Jesus	Universidad de Jaén
Pedro González	Universidad de Jaén
María Dolores Pérez	Universidad de Jaén
Francisco Charte	Universidad de Jaén
Ángel Miguel García	Universidad de Jaén
José Luis López	Universidad de Jaén
Álvaro Labella	Universidad de Jaén
Manuel Germán	Universidad de Jaén

Comité de Programa

Investigador	Institución
Jesús Alcalá-Fernández	Universidad de Granada
Cristina Alcalde	Universidad del País Vasco UPV/EHU
Sergio Alonso	Universidad de Granada
Jose M. Alonso	Universidad de Santiago de Compostela
Roberto G. Aragón	Universidad de Cádiz
Edurne Barrenechea	Universidad Pública de Navarra
Senén Barro	Universidad de Santiago de Compostela
María José Benítez-Caballero	Universidad de Cádiz
Fernando Bobillo	Universidad de Zaragoza
Alberto Bugarín-Diz	Universidade de Santiago de Compostela
Ana Burusco	Universidad Pública de Navarra
Humberto Bustince	Universidad Pública de Navarra
Inmaculada P. Cabrera	Universidad de Málaga
Francisco Javier Cabrerizo	Universidad de Granada
José M. Cadenas	Universidad de Murcia
Tomasa Calvo	Universidad de Alcalá
Pablo Carmona	Universidad de Extremadura
Juan Luis Castro	Universidad de Granada
Pablo Cordero	Universidad de Málaga
Óscar Cordón	Universidad de Granada
Maria Eugenia Cornejo Piñero	Universidad de Cádiz
Susana Cubillo	Universidad Politécnica de Madrid
Rocio De Andres	Universidad de Salamanca
Miguel Delgado	Universidad de Granada
Susana Díaz	Universidad de Oviedo
Jorge Elorza	Universidad de Navarra
Javier Fernández	Universidad Pública de Navarra
Mikel Galar	Universidad Pública de Navarra
José Luis García-Lapresta	Universidad de Valladolid
Lluis Godo	Instituto de Investigación en Inteligencia Artificial, IIIA - CSIC
Antonio González	Universidad de Granada
Francisco Herrera Triguero	Universidad de Granada
Enrique Herrera Viedma	Universidad de Granada
Luis Jiménez Linares	Universidad de Castilla-La Mancha
Maria Teresa Lamata	Universidad de Granada
David Lobo	Universidad de Cádiz
Bonifacio Llamazares	Universidad de Valladolid
Carlos López-Molina	Universidad Pública de Navarra
José Luis López Ruiz	Universidad de Jaén
Nicolás Madrid	Universidad de Cádiz
Luis Magdalena	Universidad Politécnica de Madrid
María J. Martín-Bautista	Universidad de Granada
Luis Martínez	Universidad de Jaén
Sebastià Massanet	Universidad de las Islas Baleares
Francisco Mata	Universidad de Jaén
Jesús Medina	Universidad de Cádiz
Jose M. Molina	Universidad Carlos III de Madrid
Javier Montero	Universidad Complutense de Madrid
Susana Montes	Universidad de Oviedo
Juan Moreno García	Universidad de Castilla-La Mancha
Manuel Ojeda-Aciego	Universidad de Málaga

Investigador	Institución
Jose Angel Olivas	Universidad de Castilla-La Mancha
Antonio Peregrín	Universidad de Huelva
Héctor Pomares	Universidad de Granada
Ana Pradera	Universidad Rey Juan Carlos
Eloísa Ramírez-Poussa	Universidad de Cádiz
Jordi Recasens	Universidad Politécnica de Cataluña
Juan Vicente Riera	Universidad de las Islas Baleares
Rosa Mª Rodríguez	Universidad de Jaén
Francisco P. Romero	Universidad de Castilla-La Mancha
Luciano Sánchez	Universidad de Oviedo
Daniel Sánchez	Universidad de Granada
José Antonio Sanz Delgado	Universidad Pública de Navarra
Jesús Serrano-Guerrero	Universidad de Castilla-La Mancha
Jose María Serrano Chica	Universidad de Jaén
Vicenc Torra	Universidad de Umea
José Luis Verdegay	Universidad de Granada

PROGRAMA

Trabajos en proceso. 1

2 *Raluca Iulia Cozma Mircescu, Gabriel Viscarret Atienza, Humberto Bustince, Francisco Javier Fernández, Cédric Marco-Detchart*
Detección temprana de anomalías en redes de distribución deagua mediante Matrix Profile: comparación entre enfoquesmultivariantes y estrategias bivariantes basadas en órdenesadmisibles

6 *José Luis López Ruiz, Macarena Espinilla Estévez, Christopher Nugent*
From sensor-based mobility to quality-of-life assessment: alinguistic fuzzy approach

10 *José Luis López Ruiz, Carlos Montoya Peña, Juan F. Gaitán-Guerrero, Antonio P. Albín-Rodríguez, Macarena Espinilla Estévez, Carlos Fernández-Basso*
Selección difusa de clientes para detección federada delestrés en dispositivos IoMT

14 *Juan F. Gaitán-Guerrero, Carmen Martínez-Cruz, José Luis López Ruiz, Macarena Espinilla Estévez, Antonio P. Albín-Rodríguez, Mihail Popescu, James Keller*
Hacia una alineación multilingüística de bioseñalesmediante operadores difusos

18 *Joaquin Arellano*
De la capacidad al riesgo: un modelo difuso basado enCP-SAT para reservas y asignación de mesas

22 *Boris Pérez-Cañedo, Eduardo René Concepción-Morales, José Luis Verdegay*
Propuesta de una metodología de decisión a posteriori paraproblemas de optimización de naturaleza difusa

26 *Maria Eugenia Cornejo Piñero, Jesús Medina, Francisco José Ocaña Alcázar*
Bases de implicaciones de atributos en enfoques basados enconexiones de Galois

30 *Mikel Ferrero-Jaurrieta, Juan Baz, Noelia Rico, Humberto Bustince*
Combinación entre funciones de overlap y operadores OWA

34 *Humberto Bustince, Diego García-Zamora, Susana Montes, Javier Montero, Graçaliz Dimuro, Laura De Miguel, Francisco Javier Fernández, Regivan Santiago, Antonio Francisco Roldán López de Hierro*
The Functional Choquet Integral

38 *Alba Lirón-León, Inmaculada Gutiérrez, J. Tinguaro Rodríguez, Daniel Gómez*
Medidas de capacidad y análisis topológico de datos

42 *Pablo Flores-Vidal, Daniel Gómez, Luis Magdalena*
Pre-procesamiento de imágenes con suavizados discretostruncados

46 *David Muñoz-Valero, Juan Moreno-García, Eusebio Angulo Sánchez-Herrera, Alejandro López-Hernández*
Prior Espacial-Temporal Difuso (PETD) para la correcciónde Seguimiento Articular en Natación

50 *Roberto G. Aragón, Celia Cordovilla-Sánchez, Pascual Jara, Jesús Medina*
Implicaciones difusas a través de suma ordinal de operadores

54 *Jesús González Gironda, Clara Simón De Blas, DanielGómez González*
Fuzzy-Transformer Fusion for Sentiment Analysis

57 *Estrella Garcia Pelluz*
Modelización de la polarización con conjuntos difusosopuestos

61 *Manuel González-Hidalgo, Arnau Mir, Alejandro Mus, Juan Vicente Riera*
Efficient Ranking and Unranking of Discrete Fuzzy Numbers

65 *Juan Moreno-García, David Muñoz-Valero, Enrique Adrian Villarrubia-Martin, Julio Alberto López-Gómez, Luis Jimenez-Linares*
WIFE, un entorno para crear modelos difusos

69 *Francisco J. Márquez-Saldaña, Francisco A. Márquez, Gonzalo A. Aranda-Corral, Joaquín Borrego-Díaz*
Intervalos semánticos difusos para la transferencia deconocimiento entre sistemas de bicicletas compartida

73 *Markel Cresop Lamelas, Humberto Bustince, Asier Urío Larrea*
Sistema federado de regresión basado en reglas difusas

77 *Iosu Rodriguez-Martinez, Humberto Bustince*
Agregación eficiente de características por caminos enRedes Convolucionales Residuales

81 *Cristina Zuheros, Francisco Herrera*
Análisis de Brechas Explicable y Mínimo EsfuerzoPsicológico para Alcanzar Consenso en Toma de Decisiones

85 **Índice de Autores**

Detección temprana de anomalías en redes de distribución de agua mediante Matrix Profile: comparación entre enfoques multivariantes y estrategias bivariantes basadas en órdenes admisibles

Raluca Iulia Cozma Mircescu[1,2][0009−0008−9886−8516], Gabriel Viscarret Atienza[1], Humberto Bustince[2][0000−0002−1279−6195], Francisco Javier Fernández[2][0000−0003−4427−3935], and Cédric Marco-Detchart[2,3][0000−0002−4310−9060]

[1] dateando S.L., Pol. Ind. Berroa 19, 31192 Tajonar, Navarra, España
rcozma@dateando.tech, gviscarret@dateando.tech
[2] Dpto. de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra, Campus Arrosadia, 31006 Pamplona, España
cozma.179091@e.unavarra.es, bustince@unavarra.es, fcojavier.fernandez@unavarra.es, cedric.marco@unavarra.es
[3] IdiSNA, Instituto de Investigación Sanitaria de Navarra, Hospital Universitario de Navarra, 31008 Pamplona, España

Resumen El Agua No Registrada (ANR) supone pérdidas millonarias a nivel global, impulsando la búsqueda de métodos de detección temprana de anomalías en redes de distribución. Este trabajo presenta la aplicación y comparación de dos estrategias bivariantes (caudal Q, presión P) sobre datos reales del SCADA de la empresa dateando (Navarra), en entornos dinámicos no etiquetados con elevada incertidumbre epistémica. En este trabajo se compara la aproximación *mstump* estándar para búsqueda de *top-k discords* con una estrategia basada en órdenes admisibles. Frente a la naturaleza compensatoria del *mstump*, que enmascara precursores críticos cuando una variable normaliza la desviación de la otra, el uso de órdenes admisibles jerarquiza las variables según cinco escenarios operativos físicamente interpretables (fuga, anomalía de control, dominancia de Q, dominancia de P y referencia), segregando eventos incipientes antes de su escalada a fallos graves en la regulación de presión (PRV). Los resultados demuestran que el método propuesto iguala la eficacia diagnóstica del estándar, incorpora un escenario de anomalía de control inaccesible para éste, e identifica criterios objetivos de selección de ventana temporal sin requerir etiquetas ni validación externa.

Keywords: Matrix Profile · Top-k discords · Órdenes admisibles · Incertidumbre · Hidráulica urbana.

1. Introducción

El Agua No Registrada (ANR), desperdiciada principalmente por fugas y roturas de tuberías, genera pérdidas globales de aproximadamente 39.000 millones de USD al año [5]. En Navarra, el ANR alcanza el 22 % [4], lo que pone de manifiesto la necesidad de desarrollar sistemas capaces de anticiparse a los fallos.

En este contexto, esta investigación se desarrolla dentro de *Aquando*, la plataforma de gestión inteligente del agua de la empresa *dateando*. El objetivo es mejorar las capacidades de detección de anomalías de la plataforma, actualmente basadas en umbrales fijos, mediante enfoques más flexibles y adaptativos capaces de responder a la variabilidad real de las redes hidráulicas. Para ello, se propone un enfoque que busca un equilibrio entre precisión, interpretabilidad y eficiencia operativa, tres requisitos que los modelos de *Deep Learning* raramente cumplen de forma simultánea en entornos industriales [3,7]. El enfoque propuesto combina la información de caudal y presión mediante *Matrix Profile*[4] y órdenes admisibles, considerando las variables caudal y presión y priorizando sobre otra según el contexto operativo. El resultado es un método capaz de detectar señales tempranas de fallo de forma robusta, sin necesidad de datos etiquetados y adaptado a las condiciones reales de operación de la red [6].

2. Preliminares

Esta investigación analiza series temporales de caudal (Q) y presión (P) recogidas por el sistema SCADA de *dateando* en depósitos y distintos sectores de la red de distribución de Navarra, con mediciones cada 5 minutos. Se trata de datos procedentes de un entorno dinámico y no etiquetado, caracterizado por estacionalidad cíclica, una tendencia global estable y ruido operativo, lo que dificulta distinguir el comportamiento normal de las anomalías. Para abordar este problema, se realiza una limpieza de datos seguida de una descomposición STL (*Seasonal-Trend decomposition using Loess*) [1], que permite separar tendencia, estacionalidad y ruido. De este modo, se establece una línea base del comportamiento normal de la red. A partir de esta referencia, el objetivo no es únicamente detectar fallos evidentes, sino identificar precursores, es decir, pequeñas desviaciones que aparecen antes de una avería y que actúan como señales tempranas de degradación del sistema.

Para ello, se emplea *Matrix Profile* (MP), una estructura de datos que, dado un fragmento de señal de longitud L, mide su grado de similitud respecto al fragmento más parecido dentro de toda la serie. Los fragmentos más disimilares, denominados *top-k discords*, se consideran candidatos a anomalía. Se comparan dos formas de combinar las señales Q y P:

Agregación estándar (*mstump*[5]): Promedia las distancias de Q y P antes de identificar el *discord*. La limitación de este enfoque es que, si P se mantiene

[4] https://github.com/matrix-profile-foundation/matrixprofile
[5] https://github.com/stumpy-dev/stumpy

Cuadro 1. Escenarios operativos y criterio prioritario $V_1 = \mathbf{A}_{[1,\cdot]} \cdot [d_Q, d_P]^\top$.

Escenario	$\det(\mathbf{A})$	V_1 (criterio prioritario)
Fuga/Rotura	$-2{,}00$	$d_Q + d_P$ (magnitud total)
Anomalía de Control	$+2{,}00$	$d_Q - d_P$ (incoherencia Q-P)
Dominancia Q	$+0{,}68$	$0{,}8\, d_Q + 0{,}2\, d_P$
Dominancia P	$-0{,}68$	$0{,}2\, d_Q + 0{,}8\, d_P$
Referencia	$+0{,}98$	$0{,}7\,(d_Q + d_P)$

estable, su comportamiento puede compensar una desviación relevante en Q, ocultando posibles precursores.

Agregación con órdenes admisibles: En lugar de promediar, se emplean órdenes admisibles [2], definidos como relaciones de orden total que refinan la estructura de un orden parcial dado, para asignar una prioridad explícita a cada variable a través de la transformación $\mathbf{V} = \mathbf{A}\cdot[d_Q,\, d_P]^\top$. La primera componente V_1 determina el ranking de anomalías, mientras que V_2 actúa únicamente como criterio de desempate. La matriz $\mathbf{A}$ se selecciona según el escenario operativo que se desee analizar (Tabla 1), de forma que una anomalía en la variable prioritaria no quede enmascarada por la estabilidad de la otra.

3. Resultados y Discusión

La validación se llevó a cabo con datos reales de un sector de la red de distribución de agua de Navarra, recogidos entre agosto y septiembre de 2023, con un total de 17 568 muestras. Durante este periodo se produjo un colapso crítico entre los días 11 y 14 de septiembre, precedido por señales sutiles de inestabilidad a finales de agosto.

El análisis en distintas escalas temporales (L entre 1 y 5 días) muestra que la detección de anomalías depende fuertemente de la ventana elegida. Mientras que el fallo masivo de septiembre domina la mayoría de escalas, la configuración de $L = 3$ días destaca por identificar claramente el precursor de finales de agosto como el evento más singular. Esto sugiere que las 72 horas constituyen el intervalo clave para capturar las primeras señales de inestabilidad antes del fallo.

El método propuesto va un paso más allá del *mstump*, detectando la anomalía y clasificándola al mismo tiempo. Los escenarios de Fuga/Rotura y Referencia reproducen los resultados del estándar, validando la coherencia interna del método. Sin embargo, el escenario de Anomalía de Control aporta un valor diferencial, identificando como evento principal el precursor de finales de agosto, asociado a un comportamiento anómalo en los sistemas de regulación (válvulas PRV). Esto indica que el método es capaz de detectar pérdidas de coherencia entre variables antes de que se produzca un fallo evidente. Al evitar la compensación entre señales, se hacen visibles problemas que los métodos basados en promedios tienden a ocultar. Finalmente, la ventana de $L = 4$ días se identifica como el mejor compromiso global, ya que todos los escenarios coinciden en señalar el mismo

evento crítico. Ventanas más cortas fragmentan la anomalía, mientras que ventanas más largas la diluyen al mezclarla con el comportamiento habitual de la red. En conjunto, el enfoque permite avanzar hacia un mantenimiento proactivo, donde cada alerta se asocia a una causa física clara sin necesidad de etiquetado previo.

4. Conclusiones y Trabajo Futuro

La incorporación de órdenes admisibles al *Matrix Profile* mejora el diagnóstico respecto a enfoques basados únicamente en magnitud estadística. En particular, el intervalo de 3 a 4 días se identifica como la escala más relevante del sistema. La ventana de 3 días permite capturar precursores sutiles que aparecen varios días antes del fallo, mientras que la de 4 días confirma la degradación estructural al obtener consenso entre las señales de caudal y presión. Esta combinación permite distinguir de forma más clara entre variaciones operativas habituales y anomalías reales, proporcionando una detección con margen suficiente para intervenir. Como trabajo futuro, se plantea automatizar la selección de la ventana óptima y explorar técnicas de análisis espectral que permitan caracterizar mejor los fallos de control, así como reducir la sensibilidad del método al ruido en los datos.

Acknowledgments. Este trabajo ha sido financiado por la ayuda de «Doctorados Industriales 2025» del Gobierno de Navarra (referencia 0011-1408-2025-000005).

Disclosure of Interests. Los autores declaran que no tienen intereses en competencia relevantes no declarados para el contenido de este trabajo.

Referencias

1. Cleveland, R.B., Cleveland, W.S., McRae, J.E., Terpenning, I.: STL: A seasonal-trend decomposition procedure based on loess. Journal of Official Statistics **6**(1), 3–73 (1990)
2. De Miguel, L., Bustince, H., Fernandez, J., Induráin, E., Kolesárová, A., Mesiar, R.: Construction of admissible linear orders for interval-valued Atanassov intuitionistic fuzzy sets with an application to decision making. Inf. Fusion **27**, 189–197 (2016)
3. Fu, G., et al.: The role of deep learning in urban water management. Water Res. **223**, 118983 (2022)
4. INE: Estadística sobre el Suministro y Saneamiento del Agua. Instituto Nacional de Estadística, Madrid (2024)
5. Liemberger, R., Wyatt, A.: Quantifying the global non-revenue water problem. J. Water Supply: Res. Technol.-Aqua **68**(1), 1–14 (2019)
6. Najafi, H., Huang, J.J.: Reliable anomaly detection in water systems. J. Water Process Eng. **76**, 108207 (2025)
7. Syed, T.A., et al.: Smart water management with digital twins. Water **16**(23), 3451 (2024)

From sensor-based mobility to quality-of-life assessment: a linguistic fuzzy approach

José L. López Ruiz[1][0000−0003−2583−8638]⋆, Macarena Espinilla Estévez[1][0000−0003−1118−7782], and Chris Nugent[2][0000−0003−0882−7902]

[1] Department of Computer Science, University of Jaén, Spain
llopez@ujaen.es, mestevez@ujaen.es
[2] School of Computing, Ulster University, UK
cd.nugent@ulster.ac.uk

Abstract. Quality-of-life assessment in ambient assisted living environments currently relies on psychometric questionnaires that are discrete in time and dependent on self-report, while human activity recognition systems produce continuous outputs that are opaque and poorly communicable to clinicians. This work in progress proposes a formal mapping between the two: a linguistic Mamdani fuzzy inference system that translates sensor-derived behavioural aggregates into a continuous level on the ordinal EQ-5D-5L scale, focused on the Mobility dimension. Two operational antecedents (daily time outside the home and nightly sleep duration) feed a consequent aligned with the five ordinal levels of the instrument. A pilot on the Mi4A-HomeData dataset (two co-residing patients, fourteen days, multi-resident ambient assisted living setting) shows that the inferences reproduce the expected behavioural hierarchy without hard thresholds and offer explicit traceability down to the activated rules.

Keywords: Fuzzy logic · Human activity recognition · Explainable AI · Health-related quality of life · Ambient assisted living · Smart home.

1 Introduction and motivation

The continuous measurement of quality of life (QoL) in ambient assisted living (AAL) remains an open methodological challenge. Validated instruments such as the EuroQol 5-Dimension 5-Level questionnaire (EQ-5D-5L) [3] provide clinical anchoring, but they must be administered individually by care staff (which does not scale to continuous monitoring), depend on self-report, and are discrete in time, missing sub-clinical change. A sensor-based human activity recognition (HAR) system could estimate the same construct continuously and objectively from observed behaviour; HAR has reached technical maturity and enables continuous, non-invasive observation [2], but its outputs are classes or probabilities poorly communicable to clinicians and lacking anchoring in any psychometric construct.

⋆ Corresponding author: llopez@ujaen.es

Post-hoc explainability methods (SHAP, LIME, Grad-CAM for 1D signals) add an external interpretive layer to opaque models. Linguistic fuzzy logic [6] instead embeds interpretability natively: each inference combines IF–THEN rules in the expert's vocabulary, and the result is traceable to the membership grade of each antecedent. To the best of our knowledge, no proposal explicitly translates HAR output into an EQ-5D-5L level through fuzzy inference.

This work in progress reports a first step in that direction, restricted to the Mobility dimension. Its contribution is threefold: (i) an explicit conceptual mapping between the questionnaire item and sensor-derived observable variables; (ii) a Mamdani type-1 fuzzy inference system (FIS) that materialises that translation as a continuous scalar on the ordinal range $[1, 5]$; and (iii) a feasibility demonstration on a multi-resident AAL dataset with explicit traceability and behaviourally coherent results.

The EQ-5D-5L questionnaire [3] structures self-perceived health along five orthogonal ordinal dimensions, which makes partial estimation legitimate; we therefore confine ourselves to Mobility.

EQ-5D-5L provides descriptive labels but no quantitative criteria, and no validated mapping exists between them and continuous behavioural variables — the gap this work addresses. Consistent with the digital-biomarker and behavioural-phenotyping literature, we hypothesise that both vocabularies describe the same underlying construct: observed behaviour manifests the functional capacity that the questionnaire estimates subjectively [1].

Hard thresholds would not capture this imprecision, which the Mamdani formulation [6] accommodates natively, yielding a continuous, auditable inference on the ordinal $[1, 5]$ scale.

2 Fuzzy inference system for the EQ-5D-5L Mobility dimension

The implemented system is a Mamdani type-1 FIS with two operational antecedents and a single consequent aligned with the Mobility dimension. Time outside the home (daily minutes spent outside the dwelling) is an observable correlate of ambulatory capacity, consistent with life-space mobility [1]; nightly sleep duration spans insufficient, adequate and excessive ranges, following adult rest recommendations [4]. In the absence of validated quantitative thresholds for the EQ-5D-5L labels, the antecedent breakpoints are expert priors amenable to data-driven calibration in future work. Both antecedents use three trapezoidal labels; the consequent is defined over $[1, 5]$ with five triangular labels centred at integers 1–5, respecting the ordinal nature of EQ-5D-5L in which each level is a point rather than a band. Figure 1 depicts the complete partitions.

The rule base comprises nine IF–THEN rules; for instance, IF time outside is high AND sleep is adequate THEN Mobility is no problems. Inference uses the minimum t-norm for antecedent conjunction and the maximum t-conorm for rule aggregation, with centroid defuzzification over the resulting area. The system is continuous and bounded by construction.

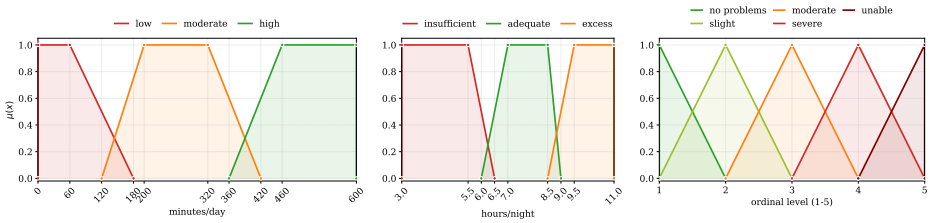


Fig. 1. Fuzzy partitions: two trapezoidal antecedents and a triangular consequent on the ordinal EQ-5D-5L scale.

3 Pilot case and preliminary results

The system was evaluated on the Mi4A-HomeData (MicroChip4Age) dataset [5], a multi-resident AAL scenario with two patients co-habiting an instrumented dwelling with Bluetooth Low Energy (BLE) anchors and manual activity annotation over fourteen consecutive days. From the six annotated activities we use the traces of leaving the home and sleep, aggregated as daily minutes outside the dwelling and hours of the main nightly sleep episode per patient and day. After discarding one partial initial day, twenty-five valid days remain across both patients.

Figure 2 shows the daily trajectory of the inferred Mobility level. Both patients remain predominantly between no problems and moderate, compatible with preserved functional autonomy, with Patient 1 showing a better median than Patient 2; day-to-day oscillations capture specific days of domiciliary confinement as a transient degradation that recovers once the usual pattern resumes.

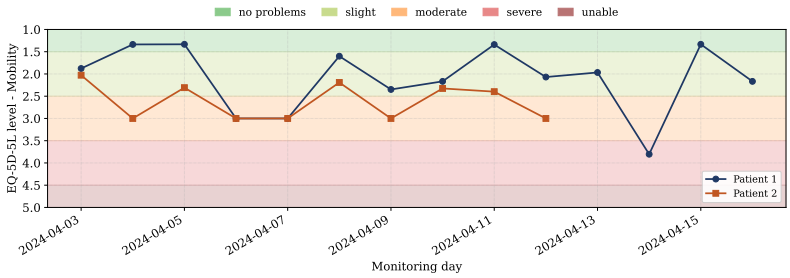


Fig. 2. Daily trajectory of the ordinal EQ-5D-5L Mobility level inferred by the FIS for the two patients of Mi4A-HomeData. The y-axis is inverted so that upward values represent better mobility. Coloured bands associate ranges of the inferred scalar with the linguistic levels of the instrument.

Table 1 reports four representative days. Three readings emerge. (i) The operational range spans the scale from no problems to severe without saturating

Table 1. Best and worst day per patient; in parentheses, the closest ordinal label.

Patient and case	Date	Time outside (min)	Sleep (h)	Level (FIS)
P1 · best day	2024-04-05	474	7.3	1.33 (no problems)
P1 · worst day	2024-04-14	60	9.8	3.80 (severe)
P2 · best day	2024-04-08	296	6.8	2.19 (slight)
P2 · worst day	2024-04-04	0	8.2	3.00 (moderate)

it. (ii) The output is continuous between adjacent days with small antecedent variations, a property hard-threshold rules cannot deliver. (iii) Each inference is traceable: Patient 1's worst day (60 min outside, sleep in the excess band) is explained by naming the two activated linguistic labels and the resulting consequent, with no external explainability technique required.

Ongoing extensions. Priorities are validation on substantially larger cohorts and extension to the remaining sensor-observable EQ-5D-5L dimensions and to fully automatic activity recognition, within the broader Fuzzy-QoL-AAL programme.

Acknowledgments. This work was developed as part of the "José Castillejo para jóvenes doctores 2025" grant CAS24/00419. It has also been partially supported by grant PID2024-156412OB-I00 funded by MICIU/AEI/10.13039/501100011033 and by "ERDF/EU" and grant M.2 PDC_000756 funded by Consejería de Universidad, Investigación e Innovación and by ERDF Andalusia Program 2021-2027.

Disclosure of Interests. The authors have no competing interests to declare that are relevant to the content of this article.

References

1. Baker, P., Bodner, E., Allman, R.: Measuring life-space mobility in community-dwelling older adults. J. Am. Geriatr. Soc. **51**(11), 1610–1614 (2003)
2. Haresamudram, H., Tang, C., Suh, S., Lukowicz, P., Plötz, T.: Past, present, and future of sensor-based human activity recognition using wearables: a surveying tutorial on a still challenging task. Proc. ACM Interact. Mob. Wearable Ubiquitous Technol. (2025)
3. Herdman, M., Gudex, C., Lloyd, A., Janssen, M., Kind, P., Parkin, D., Bonsel, G., Badia, X.: Development and preliminary testing of the new five-level version of EQ-5D (EQ-5D-5L). Qual. Life Res. **20**(10), 1727–1736 (2011)
4. Hirshkowitz, M., Whiton, K., Albert, S., et al.: National sleep foundation's updated sleep duration recommendations: final report. Sleep Health **1**(4), 233–243 (2015)
5. López Ruiz, J., Díaz Jiménez, D., Gaitán Guerrero, J., Albín Rodríguez, A., Espinilla, M.: Mi4A-HomeData. MicroChip4Age dataset on domestic behaviours in a multi-user environment. Zenodo (2024). https://doi.org/10.5281/zenodo.19182994, `https://doi.org/10.5281/zenodo.19182994`
6. Mamdani, E., Assilian, S.: An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. Int. J. Man-Mach. Stud. **7**(1), 1–13 (1975)

Selección difusa de clientes para detección federada del estrés en dispositivos IoMT

José L. López Ruiz[1 [0000−0003−2583−8638]⋆], Carlos Montoya-Peña[2 [0009−0007−3111−3146]], Juan Francisco Gaitán Guerrero[1 [0009−0007−6872−1401]], Antonio Pedro Albín Rodríguez[1 [0000−0003−3447−2260]], Macarena Espinilla[1 [0000−0003−1118−7782]], and Carlos Fernández-Basso[3 [0000−0002−8809−8676]]

[1] Dpto. Informática, Universidad de Jaén, España
{llopez,jgaitan,aalbin,mestevez}@ujaen.es
[2] Facultad de Ingeniería, Universidad Don Bosco, Soyapango, El Salvador
carlos.montoya@udb.edu.sv
[3] Dpto. de Ciencias de la Computación e IA, Universidad de Granada, España
cjferba@ugr.es

Resumen. El estrés crónico es un factor de riesgo cardiovascular y mental cuya detección continua mediante dispositivos vestibles del Internet de las Cosas Médicas constituye una alternativa no invasiva viable en el borde. Llevar esa solución a un despliegue real exige aprendizaje federado; sin embargo, el algoritmo canónico FedAvg no contempla factores determinantes como la calidad de la señal, el movimiento, la batería o la antigüedad de la calibración. Proponemos un sistema basado en reglas difusas de tipo Mamdani que toma esos cuatro factores como antecedentes operacionales y devuelve dos salidas continuas y auditables, una probabilidad de inclusión π_c y un peso de agregación ω_c, mediante una base de once reglas. Se ha desarrollado un prototipo en `scikit-fuzzy` evaluado sobre cinco perfiles de cliente, base de un futuro sistema federado de detección de estrés desplegado sobre dispositivos de bajo coste.

Palabras clave: Aprendizaje federado · Lógica difusa · Monitorización del estrés · Variabilidad de la frecuencia cardíaca · Internet de las Cosas Médicas.

1 Introducción

El estrés crónico afecta a cerca del 13 % de la población adulta y es un factor de riesgo cardiovascular y mental [7]. La evaluación clínica convencional resulta intrusiva y poco apta para la monitorización ambulatoria, mientras que el Internet de las Cosas Médicas (IoMT) y los dispositivos vestibles han abierto una vía no invasiva basada en la Variabilidad de la Frecuencia Cardíaca (HRV) y el ritmo respiratorio, viable incluso sobre dispositivos de cómputo reducido [4]. El salto a un despliegue real choca, sin embargo, con dos obstáculos: la marcada

⋆ Autor de correspondencia: llopez@ujaen.es

variabilidad inter-sujeto obliga a personalizar el modelo a cada paciente, y las restricciones regulatorias y éticas sobre la centralización de datos biométricos limitan la agregación de información.

El aprendizaje federado (FL) [3] responde a ambos problemas: mantiene los datos en el dispositivo y habilita el entrenamiento colaborativo. En nuestra propuesta basada en dispositivos vestibles biométricos, FedAvg presenta limitaciones operacionales: trata la inclusión como decisión binaria que descarta el matiz de indicadores como el Índice de Calidad de la Señal (Signal Quality Index, SQI) [5], combina evidencias heterogéneas (señal, batería, calibración) mediante umbrales independientes y no proporciona trazabilidad clínica de la exclusión. Para abordarlas proponemos un sistema basado en reglas difusas [2] de tipo Mamdani, en adelante módulo difuso, concebido para integrarse en arquitecturas federadas como las validadas previamente en entornos clínicos e IoMT [6].

El caso de uso de referencia [4] aborda la clasificación estrés/no-estrés sobre WESAD con un esquema de dos etapas (entrenamiento poblacional y fine-tuning por sujeto) en dispositivos de borde. Se proyecta sobre un esquema FL con personalización local persistente: cada sujeto es un cliente que entrena de forma incremental sobre sus registros HRV y respiratorios, conserva el modelo afinado y participa en rondas periódicas de agregación con un nodo central, sobre las que actúa la capa difusa descrita a continuación.

2 Sistema basado en reglas difusas para selección y ponderación federada de clientes

El módulo difuso recibe cuatro señales operacionales por cliente, detalladas en la Figura 1: el SQI cardíaco (índice de Orphanidou en $[0, 1]$) gobierna la validez de las características de HRV; el movimiento distingue un sensor mal ajustado de la actividad física; la energía condiciona la comunicación con el nodo y la fiabilidad de las medidas; y la antigüedad de la calibración refleja que la medicación puede desfasar los valores de referencia en pocas horas.

El módulo difuso produce dos consecuentes funcionalmente desacoplados: la inclusión π_c (¿debe participar el cliente en la ronda actual?) y el peso ω_c (¿cuánto debe contribuir su actualización al modelo agregado?). Ambos comparten las mismas cinco etiquetas trapezoidales (muy baja a muy alta) de la Figura 1. Cada cliente evalúa las 11 reglas en local combinando los antecedentes con la T-norma, agrega las contribuciones activadas con la t-conorma del máximo y obtiene (π_c, ω_c) por defuzzificación de centroide, siguiendo el tratamiento estándar de Mamdani [2]. Las reglas, derivadas de conocimiento experto, cubren la exclusión (mala señal, movimiento o batería crítica), la inclusión graduada por SQI, energía y antigüedad de la calibración, y la reducción del peso ante una calibración obsoleta; una regla de soporte residual (R11) garantiza por construcción $\pi_c \geq \pi_{\min}$.

Integración con FedAvg. En la ronda t cada cliente c evalúa localmente su módulo difuso sobre las cuatro señales y transmite al nodo central el par (π_c^t, ω_c^t). El nodo realiza para cada cliente una tirada de Bernoulli con probabilidad π_c^t; el

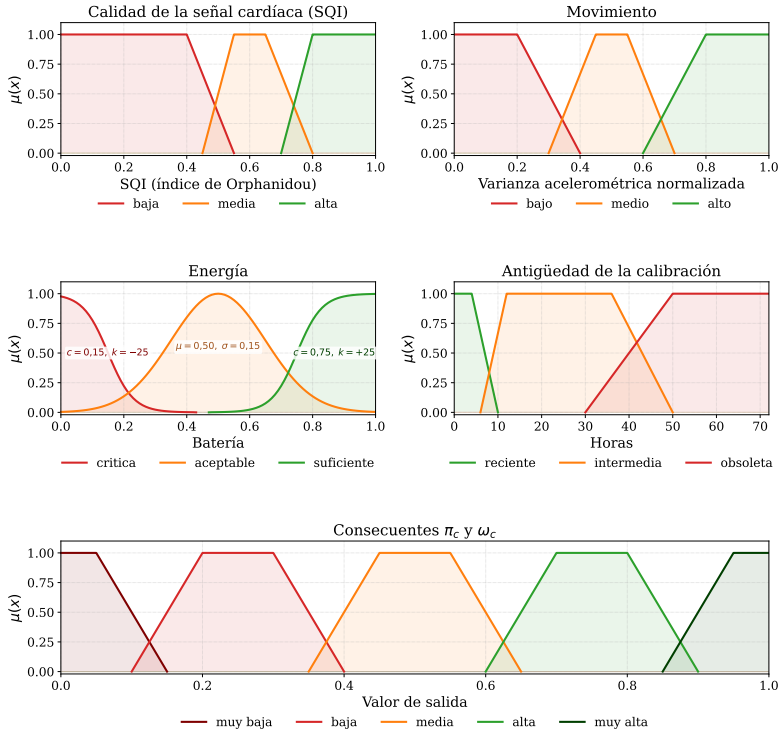


Fig. 1. Funciones de pertenencia del módulo difuso: cuatro antecedentes operacionales (SQI cardíaco, movimiento, energía, antigüedad de la calibración) y la partición de salida compartida por π_c y ω_c.

subconjunto resultante S_t se corrige para satisfacer la restricción de cardinalidad $|S_t| \in [K_{\min}, K_{\max}]$. El peso canónico de FedAvg n_c/n se sustituye por el peso compuesto $\omega_c^t\, n_c / \sum_{c' \in S_t} \omega_{c'}^t\, n_{c'}$, de modo que los clientes con menor calidad operacional contribuyen menos al modelo agregado. Este es el régimen de biased client sampling de [1], cuyas garantías de convergencia se preservan bajo dos condiciones constructivas: (i) $\pi_c^t \geq \pi_{\min} > 0$ para todo c, t, impuesta por R11; y (ii) la respuesta continua y acotada del módulo a sus entradas, que se verifica para nuestras particiones trapezoidales y los operadores mínimo/máximo.

3 Resultados preliminares

Implementamos el módulo difuso en `scikit-fuzzy` con las 11 reglas y las particiones de la Figura 1, y lo evaluamos sobre los cinco perfiles de la Tabla 1. El rango operativo $\pi_c, \omega_c \in [0{,}27;\ 0{,}93]$ reproduce la jerarquía cualitativa esperada (condiciones ideales arriba, batería crítica abajo pese a su señal casi perfecta) sin umbrales duros, y cada salida es trazable a las etiquetas lingüísticas activadas. El

Table 1. Salidas π_c y ω_c defuzzificadas por centroide sobre cinco perfiles representativos de cliente.

Perfil	SQI	Artef.	Energ.	Cal. (h)	π_c	ω_c
Nominal	0.72	0.30	0.55	6	0.57	0.57
Sujeto en movimiento	0.45	0.75	0.60	12	0.38	0.38
Batería crítica	0.85	0.15	0.10	4	0.27	0.27
Condiciones ideales	0.92	0.10	0.90	2	0.93	0.93
Calibración obsoleta	0.55	0.20	0.50	60	0.50	0.38

perfil de calibración obsoleta ilustra el desacoplo entre consecuentes ($\pi_c = 0{,}50$ frente a $\omega_c = 0{,}38$): el cliente sigue siendo seleccionable pero su gradiente pesa menos porque el módulo reconoce que el fine-tuning local está desfasado.

4 Trabajo en desarrollo

Los resultados validan el comportamiento del módulo difuso a nivel de cliente; el siguiente paso es integrarlo en el bucle federado completo, desplegándolo sobre dispositivos vestibles biométricos y un nodo central de agregación para evaluar su comportamiento conjunto con FedAvg en condiciones operativas reales.

Agradecimientos. This work has been partially supported by grant PID2024-156412OB-I00 funded by MICIU/AEI/10.13039/501100011033 and by "ERDF/EU" and grant M.2 PDC_000756 funded by Consejería de Universidad, Investigación e Innovación and by ERDF Andalusia Program 2021-2027.

Conflicto de intereses. Los autores declaran no tener intereses en conflicto.

Referencias

1. Cho, Y.J., Wang, J., Joshi, G.: Towards understanding biased client selection in federated learning. In: AISTATS. pp. 10351–10375 (2022)
2. Mamdani, E.H.: Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. Proc. IEE **121**(12), 1585–1588 (1975)
3. McMahan, B., Moore, E., Ramage, D., Hampson, S., Aguera y Arcas, B.: Communication-efficient learning of deep networks from decentralized data. In: AISTATS. pp. 1273–1282 (2017)
4. Montoya-Peña, C., Gaitán Guerrero, J.F., Espinilla, M., López, J.L.: Towards lightweight stress monitoring on biometric data for IoMT environments. Computer Methods and Programs in Biomedicine **279**, 109287 (2026)
5. Orphanidou, C., Bonnici, T., Charlton, P., Clifton, D., Vallance, D., Tarassenko, L.: Signal-quality indices for the ECG and PPG. IEEE J. Biomed. Health Inform. **19**(3), 832–838 (2015)
6. Rivas, J.M., Fernandez-Basso, C., Morcillo-Jimenez, R., Paños-Basterra, J., Ruiz, M.D., Martin-Bautista, M.J.: SimulaFed: an enhanced federated simulated environment for privacy and security in health. Computing **107**(3) (2025)
7. World Health Organization: World mental health report (2022)

Hacia una alineación multilingüística de bioseñales mediante operadores difusos

Juan F. Gaitán-Guerrero[1], Carmen Martínez-Cruz[2], José L. López[1], Macarena Espinilla[1], Antonio P. Albín-Rodríguez[1], Mihail Popescu[3], and James Keller[4]

[1] Universidad de Jaén, Jaén, España
{jgaitan,llopez,mestevez,aalbin}@ujaen.es
[2] Universidad de Granada, Granada, España
cmcruz@ugr.es
[3] School of Medicine, University of Missouri, Columbia, MO, EE.UU.
popescum@health.missouri.edu
[4] University of Missouri, Columbia, MO, EE.UU.
kellerj@missouri.edu

Resumen Las bioseñales modeladas por expertos suelen interpretarse como secuencias de observaciones lingüísticas, no como flujos numéricos en bruto. Esta representación es especialmente útil en contextos clínicos, donde las etiquetas lingüísticas facilitan una caracterización próxima al razonamiento profesional. Además, el significado de cada observación depende del momento en que aparece y de la combinación de varios descriptores. Este trabajo presenta un operador de similitud difusa para actuar como coste local en algoritmos de comparación de series temporales, tomando *Dynamic Time Warping* (DTW) como caso de uso. Cada evento se representa mediante varios descriptores lingüísticos, incluido el contexto temporal, y la coincidencia se calcula en el espacio cualitativo de cada descriptor. Un umbral por variable actúa como compuerta de admisibilidad: una discrepancia en un eje crítico impide la alineación aunque los demás descriptores sean similares. El operador devuelve un grado de similitud interpretable en $[0, 1]$ o una marca de no comparabilidad, que en DTW se traduce en celdas prohibidas y dirige el camino óptimo hacia regiones cualitativamente coherentes.

Keywords: Modelado experto de datos · Series temporales · Similitud difusa · Computación por palabras · Dynamic Time Warping.

1. Introducción y motivación

En numerosos dominios científicos e industriales, y de forma muy particular en el análisis de bioseñales, las series temporales (ST) se interpretan como secuencias de observaciones que un experto reconoce y etiqueta cualitativamente, más que como flujos numéricos en bruto. Su significado no suele depender de una única magnitud, sino de la lectura conjunta de descriptores. Esta idea sustenta las descripciones y resúmenes lingüísticos difusos de ST [1], que transforman medidas en enunciados próximos al lenguaje experto. En señales biomédicas, esta

capa lingüística ayuda además a expresar rangos, tendencias y cambios relevantes en términos que pueden ser discutidos, validados y reutilizados por profesionales clínicos.

Una vez representados lingüísticamente, los eventos deben poder *compararse* de forma numérica para tareas como monitorización, detección de anomalías, recuperación o agrupamiento por prototipos. Existen distancias y medidas de similitud definidas sobre resúmenes lingüísticos [2,3], pero dos aspectos del razonamiento experto siguen poco representados, sobre todo cuando las etiquetas pretenden conservar significado clínico. Primero, la *multiplicidad de descriptores*: las distancias clásicas reducen la observación a un escalar y muchas aproximaciones lingüísticas conservan solo una etiqueta dominante. Segundo, el *contexto temporal*: un mismo evento puede cambiar de significado según cuándo ocurra, aunque a menudo el tiempo se trata solo como índice y no como eje semántico.

La comparación de secuencias completas suele abordarse mediante DTW [5], que alinea dos series a partir de una matriz de coste local. La elección de ese coste determina la semántica del alineamiento: una distancia euclídea ignora la estructura cualitativa del evento, mientras que un operador lingüístico multietiqueta convierte cada celda en una comparación interpretable. El operador propuesto se diseña como coste local para DTW y transforma las marcas de no comparabilidad en celdas prohibidas, de modo que el camino de warping preserve una alineación coherente con el razonamiento experto.

2. Operador propuesto

2.1. Representación multietiqueta de un evento

Sea un evento caracterizado por K descriptores lingüísticos definidos por el experto, cada uno sobre su propio universo de discurso U_k y equipado con una familia ordenada de etiquetas $\mathcal{L}^{(k)} = \{L_1^{(k)}, \ldots, L_{R_k}^{(k)}\}$ con funciones de pertenencia $\mu_{L_r^{(k)}} : U_k \to [0,1]$. En bioseñales, estos descriptores pueden codificar no solo magnitudes, sino también estados clínicamente comprensibles como intensidad, estabilidad o tendencia. Para un evento x_i con componentes $(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(K)})$, su huella lingüística difusa es la tupla

$$\Phi^{(k)}(x_i) = \big(\mu_{L_1^{(k)}}(x_i^{(k)}), \ldots, \mu_{L_{R_k}^{(k)}}(x_i^{(k)})\big). \tag{1}$$

2.2. Coincidencia por descriptor

Para cada descriptor k, la etiqueta lingüística dominante de un evento z se define como

$$\ell^{(k)}(z) \;=\; \arg \max_{r \in \{1,\ldots,R_k\}} \mu_{L_r^{(k)}}(z^{(k)}), \tag{2}$$

es decir, el índice de la etiqueta que mejor resume z a lo largo del descriptor k. La coincidencia entre dos eventos x_i y y_j en ese descriptor se define como el complemento de la distancia posicional normalizada entre sus etiquetas dominantes

en $\mathcal{L}^{(k)}$:

$$\mathcal{S}^{(k)}(x_i, y_j) \;=\; 1 \;-\; \frac{\left|\ell^{(k)}(x_i) - \ell^{(k)}(y_j)\right|}{R_k - 1}. \tag{3}$$

La puntuación $\mathcal{S}^{(k)} \in [0,1]$ es simétrica y reflexiva: vale 1 cuando ambos eventos comparten etiqueta dominante y decrece linealmente con la separación entre dominantes. Esta elección mantiene el operador cercano a la verbalización experta —"*mañana, alto, en ascenso*"— y facilita que la comparación conserve una lectura clínica o funcional, sin exigir la comparación de distribuciones difusas completas.

2.3. Compuerta específica por variable

Cada descriptor tiene un umbral de admisibilidad $\tau_k \in [0,1]$ que fija la mínima coincidencia lingüística exigida en ese eje. Sea $\mathcal{K}_{\text{req}} \subseteq \{1, \ldots, K\}$ el subconjunto de descriptores obligatorios, y sea $\{\omega_k\}_{k=1}^{K}$ una ponderación convexa ($\sum_k \omega_k = 1$, $\omega_k \geq 0$). El operador devuelve un valor cuando todos los descriptores obligatorios satisfacen su umbral, y una marca de no comparabilidad en caso contrario:

$$\mathcal{F}(x_i, y_j) \;=\; \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \omega_k \, \mathcal{S}^{(k)}(x_i, y_j), & \text{si } \mathcal{S}^{(k)}(x_i, y_j) \geq \tau_k \;\; \forall k \in \mathcal{K}_{\text{req}}, \\ \perp, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4}$$

El símbolo $\perp$ marca el par como no lingüísticamente comparable. El operador es simétrico, reflexivo sobre pares admisibles y acotado en $[0,1]$ siempre que se devuelva un valor.

2.4. Integración en DTW

El operador $\mathcal{F}$ se incorpora como coste local en DTW usando $1 - \mathcal{F}(x_i, y_j)$ para los pares admisibles y $+\infty$ para las celdas marcadas con $\perp$. Así, las restricciones lingüísticas de los umbrales τ_k se propagan al alineamiento global: el camino óptimo no solo minimiza coste, sino que debe pasar por pares cualitativamente comparables. Esto resulta relevante cuando una diferencia local, por ejemplo entre dos estados fisiológicos, no debe quedar compensada por coincidencias menos críticas en otros ejes. La Figura 1 muestra cómo las regiones prohibidas redirigen el alineamiento hacia zonas de coherencia lingüística.

3. Conclusiones

El operador presentado compara cada descriptor en su propio espacio cualitativo, incorpora el contexto temporal como un descriptor más y usa umbrales específicos para decidir la admisibilidad de cada par. La formulación permite mantener la semántica de etiquetas relevantes en la caracterización de bioseñales, evitando que diferencias cualitativas importantes se diluyan en una distancia

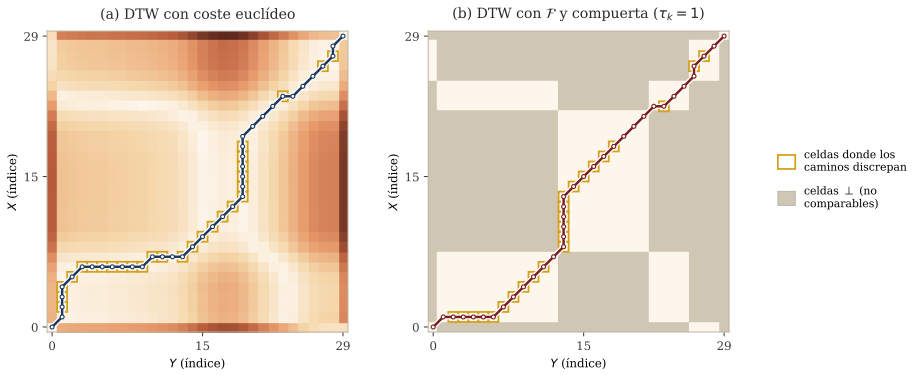


Figura 1. Matrices de alineamiento DTW para dos series con ambos costes.

puramente numérica. Al emplearse como coste local en DTW, las marcas $\perp$ se convierten en celdas prohibidas que reconducen el camino de warping y producen alineamientos coherentes con el razonamiento experto sobre patrones temporales.

Acknowledgments. Este trabajo ha sido respaldado por el proyecto PID2021-127275 OB-I00, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por "FEDER, una manera de hacer Europa"; por el proyecto PID2024-156412OB-I00, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por "FEDER/UE"; y por el proyecto M.2 PDC_00 0756, financiado por la Consejería de Universidad, Investigación e Innovación y por el Programa FEDER Andalucía 2021-2027.

Disclosure of Interests. Los autores declaran no tener intereses en conflicto.

Referencias

1. Marín, N., Sánchez, D.: On generating linguistic descriptions of time series. Fuzzy Sets and Systems **285**, 6–30 (2016)
2. Wilbik, A., Keller, J.M.: A fuzzy measure similarity between sets of linguistic summaries. IEEE Transactions on Fuzzy Systems **21**(1), 183–189 (2012)
3. Wilbik, A., Keller, J.M., Bezdek, J.C.: Linguistic prototypes for data from eldercare residents. IEEE Transactions on Fuzzy Systems **22**(1), 110–123 (2013)
4. Kaczmarek-Majer, K., Baczyński, M., Hryniewicz, O., Miś, K., Mucha, W., Wichrowski, F.: Fuzzy linguistic summaries for hidden Markov models. In: IPMU 2024. LNNS, vol. 1176, pp. 266–276. Springer (2024)
5. Sakoe, H., Chiba, S.: Dynamic programming algorithm optimization for spoken word recognition. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. **26**(1), 43–49 (1978)

De la capacidad al riesgo: un modelo difuso basado en CP-SAT para reservas y asignación de mesas

Joaquin Arellano

Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra, Campus de Arrosadia, Pamplona, 31006, España

Resumen Este trabajo en progreso aborda la asignación automática de reservas a mesas o combinaciones válidas en restaurantes. Se formula una versión básica y funcional basada en CP-SAT que respeta capacidades, reservas fijadas manualmente, restricciones de mesas, no solape temporal con buffers y carga de cocina. El objetivo principal es preservar capacidad futura, en particular el tamaño máximo de grupo aceptable por franja. Además, se definen medidas difusas para convertir riesgo, saturación y preferencia de mesas en grados de satisfacción comparables. El prototipo se ha embebido en una aplicación de gestión de reservas y se encuentra en pruebas en restaurantes reales.

Keywords: Asignación de reservas · CP-SAT · lógica fuzzy · capacidad futura · restaurantes.

1. Motivación y alcance

La gestión de reservas exige asignar cada grupo a mesas físicas o combinaciones permitidas, respetando capacidades, decisiones manuales del personal y restricciones temporales. Una solución factible puede ser operativamente pobre si bloquea recursos grandes, concentra llegadas en cocina o deja huecos difíciles de reutilizar. Por ello, el objetivo no se limita a acomodar reservas existentes, sino que busca mantener flexibilidad para nuevas reservas. El sistema considerado cubre tres tareas: asignar reservas no fijadas, responder consultas de disponibilidad y estimar una curva de capacidad por franja. La contribución preliminar es una formulación compacta que separa restricciones duras de medidas difusas usadas para diagnóstico, ordenación de alternativas y explicación operativa.

2. Modelo básico y restricciones principales

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de mesas físicas y $\mathcal{R}$ el de recursos válidos; cada recurso r es una mesa o combinación, ocupa $\mathcal{M}(r) \subseteq \mathcal{M}$ y tiene capacidades $C_r^{\text{mín}}, C_r^{\text{máx}} \in \mathbb{Z}_{>0}$, $C_r^{\text{mín}} \leq C_r^{\text{máx}}$. El servicio se discretiza en franjas

$$\mathcal{T} = \{0, \ldots, K-1\}, \qquad K = (H^{\text{fin}} - H^{\text{ini}})/\Delta.$$

Cada reserva $i \in \mathcal{I}$ tiene tamaño p_i, inicios $S_i \subseteq \mathcal{T}$, duraciones L_i, mesas restringidas $\mathcal{M}_i^{\text{rest}}$ y mesas preferidas $\mathcal{M}_i^{\text{pref}}$. Por defecto, $\mathcal{M}_i^{\text{rest}} = \mathcal{M}$, y la preferencia efectiva es $\mathcal{M}_i^{\text{pref,eff}} = \mathcal{M}_i^{\text{pref}} \cap \mathcal{M}_i^{\text{rest}}$.

Los recursos admisibles, la ocupación temporal y los candidatos se definen como

$$\mathcal{R}_i = \{r \in \mathcal{R} : C_r^{\text{mín}} \le p_i \le C_r^{\text{máx}} \ \wedge \ \mathcal{M}(r) \subseteq \mathcal{M}_i^{\text{rest}}\},$$
$$O_i(s,\ell) = \{\tau \in \mathcal{T} : s - \beta_i^- \le \tau \le s + \ell - 1 + \beta_i^+\},$$
$$\Omega_i = \{(r,s,\ell) : r \in \mathcal{R}_i,\ s \in S_i,\ \ell \in L_i,\ O_i(s,\ell) \subseteq \mathcal{T}\}.$$

La variable binaria $x_{i,r,s,\ell}$ indica que la reserva i se asigna al recurso r, inicio s y duración ℓ. Si $x_{i,r,s,\ell} = 1$, entonces $\text{start}_i = s$ y $\text{end}_i = s + \ell - 1$. Las reservas se separan en fijas $\mathcal{F}$ y optimizables $\mathcal{U} = \mathcal{I} \setminus \mathcal{F}$. Las restricciones principales son: asignación única, bloqueo de reservas fijas y no solape por mesa física,

$$\sum_{(r,s,\ell)\in\Omega_i} x_{i,r,s,\ell} = 1 \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

$$x_{i,r_i^\star,s_i^\star,\ell_i^\star} = 1, \quad x_{i,r,s,\ell} = 0 \quad \forall i \in \mathcal{F},\ (r,s,\ell) \neq (r_i^\star, s_i^\star, \ell_i^\star),$$

$$\delta_{m,\tau}^{i,r,s,\ell} = \begin{cases} 1, & m \in \mathcal{M}(r) \ \wedge \ \tau \in O_i(s,\ell), \\ 0, & \text{en otro caso}, \end{cases}$$

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{(r,s,\ell)\in\Omega_i} \delta_{m,\tau}^{i,r,s,\ell} x_{i,r,s,\ell} \le 1 \quad \forall m \in \mathcal{M},\ \forall \tau \in \mathcal{T}.$$

Las preferencias de mesas no son restricciones duras. Se modelan mediante

$$\pi_i(r) = \begin{cases} 1, & \mathcal{M}_i^{\text{pref}} = \emptyset, \\ \dfrac{|\mathcal{M}(r) \cap \mathcal{M}_i^{\text{pref,eff}}|}{|\mathcal{M}(r)|}, & \text{en otro caso}, \end{cases}$$
$$\text{Pref}(\mathcal{S}) = \frac{1}{|\mathcal{I}|} \sum_{i,(r,s,\ell)\in\Omega_i} \pi_i(r) x_{i,r,s,\ell}.$$

La carga de cocina por franja puede incorporarse con pesos de llegada ω_d:

$$A_\tau = \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{(r,s,\ell)\in\Omega_i} p_i \omega_{\tau-s} \mathbf{1}_{[-a,b]}(\tau - s) x_{i,r,s,\ell},$$
$$e_\tau \ge A_\tau - Q_\tau, \qquad e_\tau \ge 0.$$

Así, $\text{Sat}_{\text{exc}} = \sum_\tau e_\tau$ cuantifica el exceso sobre la capacidad de cocina Q_τ y puede usarse como diagnóstico o criterio secundario. Esta separación entre restricciones duras y criterios blandos facilita su uso en la aplicación: el personal puede bloquear reservas o restringir mesas, y el optimizador reorganiza sólo las reservas restantes. La versión básica prioriza factibilidad, estabilidad y respeto de decisiones humanas antes que una reasignación global agresiva. Esto es importante en sala, donde pequeños cambios pueden ser aceptables matemáticamente pero incómodos para el personal.

3. Capacidad futura y fórmula de $\mathrm{Cap}^{\mathrm{máx}}$

Para una solución $\mathcal{S}$ y una franja de inicio τ, `Cap_max` es el tamaño máximo de un único grupo aceptable. Sea ℓ^{ref} la duración de referencia de una nueva reserva y $f^-(P), f^+(P)$ sus buffers. Denotamos por $o_{m,\tau}(\mathcal{S}) \in \{0,1\}$ la ocupación inducida por $\mathcal{S}$ en la mesa física m y la franja τ:

$$W(\tau,P) = \{\tau' \in \mathcal{T} : \tau - f^-(P) \le \tau' \le \tau + \ell^{\mathrm{ref}} - 1 + f^+(P)\}.$$

La definición matemática es

$$\begin{aligned}\mathrm{Cap}^{\mathrm{máx}}(\tau;\mathcal{S}) = \mathrm{máx}\{P \in \mathbb{Z}_{\ge 0} : \exists r \in \mathcal{R},\ & C_r^{\mathrm{mín}} \le P \le C_r^{\mathrm{máx}},\\ & \forall m \in \mathcal{M}(r),\ \forall \tau' \in W(\tau,P),\\ & o_{m,\tau'}(\mathcal{S}) = 0\}.\end{aligned}$$

Una integración básica en CP-SAT evalúa cada recurso en $C_r^{\mathrm{máx}}$ mediante la ocupación decidida $o_{m,\tau}$, la disponibilidad binaria $z_{r,\tau}$ y auxiliares $t_{r,\tau}$:

$$o_{m,\tau} = \sum_{i,(r,s,\ell)\in\Omega_i} \delta_{m,\tau}^{i,r,s,\ell} x_{i,r,s,\ell},$$

$$h_{r,\tau} = \sum_{m\in\mathcal{M}(r)} \sum_{\tau'\in W(\tau,C_r^{\mathrm{máx}})} o_{m,\tau'}, \qquad z_{r,\tau} = 1 \Leftrightarrow h_{r,\tau} = 0,$$

$$t_{r,\tau} = C_r^{\mathrm{máx}} z_{r,\tau}, \qquad \mathrm{Cap}_\tau^{\mathrm{máx}} = \mathrm{máx}\big(0, \{t_{r,\tau} : r \in \mathcal{R}\}\big).$$

La equivalencia y el máximo se implementan con restricciones reificadas y una restricción de máximo del solver. El objetivo principal en un conjunto de franjas relevantes $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ queda

$$\mathrm{máx} \sum_{\tau\in\mathcal{T}'} w_\tau \mathrm{Cap}_\tau^{\mathrm{máx}},$$

donde w_τ pondera las horas de mayor demanda. Esta versión mantiene como criterio principal la flexibilidad para aceptar grupos grandes. Operativamente, $\mathrm{Cap}_\tau^{\mathrm{máx}}$ no es aforo libre agregado, sino el mayor grupo real aceptable en τ considerando mesas, combinaciones y buffers. En el prototipo se muestra como curva de disponibilidad futura; una caída local alerta de que una asignación factible consume recursos estratégicos. Esta métrica evita decisiones miopes, por ejemplo asignar un grupo pequeño a la única mesa capaz de alojar un grupo grande posterior. También permite comparar escenarios antes de confirmar una reserva nueva. El motor previsto es CP-SAT de OR-Tools [2].

4. Medidas difusas

La viabilidad binaria no captura la calidad operativa gradual. Se convierten riesgo, saturación y preferencia en grados $\mu \in [0,1]$ mediante funciones de

pertenencia lineales a trozos, siguiendo la noción clásica de conjuntos fuzzy [1]:

$$\mu^{\uparrow}(x;a,b)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ (x-a)/(b-a), & a<x<b,\\ 1, & x\ge b,\end{cases}$$

$$\mu^{\downarrow}(x;a,b)=\begin{cases}1, & x\le a,\\ (b-x)/(b-a), & a<x<b,\\ 0, & x\ge b.\end{cases}$$

Estas funciones representan satisfacción creciente y decreciente, respectivamente. Sea $\mathrm{Consec}(m)$ el conjunto de pares (i,j) asignados a la misma mesa física m y consecutivos en el tiempo; si no hay pares, el mínimo correspondiente se toma como 1. El hueco es $g_m(i,j)=\mathrm{start}_j-\mathrm{end}_i$. Con $\Gamma_1<\Gamma_2$,

$$\mu^{\mathrm{loc}}_{\mathrm{riesgo}}(i,j,m)=\mu^{\uparrow}(g_m(i,j);\Gamma_1,\Gamma_2),$$
$$\mu_{\mathrm{riesgo}}(\mathcal{S})=\min_{m}\ \min_{(i,j)\in\mathrm{Consec}(m)}\mu^{\mathrm{loc}}_{\mathrm{riesgo}}(i,j,m).$$

Para saturación se usa $\rho_\tau=A_\tau/\max\{1,Q_\tau\}$ y umbrales $\rho_1<\rho_2$:

$$\mu^{\mathrm{loc}}_{\mathrm{sat}}(\tau)=\mu^{\downarrow}(\rho_\tau;\rho_1,\rho_2),\qquad \mu_{\mathrm{sat}}(\mathcal{S})=\min_{\tau\in\mathcal{T}}\mu^{\mathrm{loc}}_{\mathrm{sat}}(\tau).$$

La preferencia es $\mu_{\mathrm{pref}}(\mathcal{S})=\mathrm{Pref}(\mathcal{S})$. La agregación global preserva un veto operativo:

$$V(\mathcal{S})=\min\{\mu_{\mathrm{riesgo}}(\mathcal{S}),\mu_{\mathrm{sat}}(\mathcal{S})\},$$
$$\mu_{\mathrm{global}}(\mathcal{S})=V(\mathcal{S})\big(\gamma+(1-\gamma)\mu_{\mathrm{pref}}(\mathcal{S})\big),\quad \gamma\in[0,1].$$

Así, una alta preferencia de mesas puede desempatar, pero no compensar una solución con riesgo o saturación críticos. Las medidas μ_{riesgo}, μ_{sat} y μ_{pref} actúan como indicadores interpretables para comparar alternativas sin exponer la formulación completa. El uso de mínimos refleja un comportamiento conservador: basta un punto crítico para degradar la solución. Esta elección favorece explicaciones simples, del tipo "hay poco margen entre dos reservas" o "la cocina queda saturada". Las modificaciones manuales del personal se registran para detectar preferencias no modeladas y recalibrar umbrales, buffers y pesos. En fases posteriores estas medidas pueden incorporarse como refinamiento lexicográfico tras fijar el óptimo de capacidad futura.

5. Resultados preliminares y estado del prototipo

La versión actual ya está embebida en una aplicación de gestión de reservas y se encuentra en pruebas en restaurantes. La validación en curso compara la asignación optimizada frente a reglas voraces de "mesa más ajustada", midiendo aceptación de nuevas reservas simuladas, tamaño máximo aceptable en horas punta, estabilidad y tiempo de resolución. El trabajo futuro completará la evaluación con datos de uso y calibración automática de parámetros difusos.

Referencias

1. Zadeh, L.A.: Fuzzy sets. Information and Control 8(3), 338–353 (1965)
2. Google: OR-Tools CP-SAT Solver. `https://developers.google.com/optimization/cp/cp_solver`, último acceso 3 junio 2026

Propuesta de una metodología de decisión *a posteriori* para problemas de optimización de naturaleza difusa

Boris Pérez-Cañedo[1][0000-0002-5623-4039] Eduardo R. Concepción-Morales[2][0000-0003-2190-1337]
José Luis Verdegay[1][0000-0003-2487-942X]

[1] DECSAI-MODO, Universidad de Granada 18071 Granada, España
[2] Departamento de Informática, Universidad de Cienfuegos, Cienfuegos, Cuba
bpcanedo@gmail.com, econcep@ucf.edu.cu, verdegay@ugr.es

Abstract. Como es obvio, la principal actividad que desarrollan los Sistemas Automatizados de Decisión es la toma de decisiones y por tanto la optimización de sus elecciones. Destaca el caso de los Sistemas Automatizados de Decisión Cooperativos (CADEMA) en los que surgen problemas de optimización multiobjetivo, naturalmente ligados a la toma de decisiones multicriterio *a posteriori*. La situación que aquí se considera supone que el decisor no elige una solución a ciegas, sino que evalúa un conjunto de alternativas (puntos eficientes) basándose en sus consecuencias y en criterios que ofrecen diversas perspectivas. Si bien existen métodos clásicos (SMART, PROMETHEE, ELECTRE…) para salvar esta dificultad, los mismos fallan cuando los objetivos son vagos, se describen en lenguaje natural o no están disponibles durante la fase de cálculo. Para salvar evitar estamos probando una nueva metodología que integra la Programación Lineal Difusa con el Modelado para la Generación de Alternativas, que es la que se describe en este trabajo.

Keywords: Fuzzy Linear Programming, Fuzzy proposition, Automated Decision Making systems

1 Introducción: El poder discriminador del orden lexicográfico

La optimización es una práctica omnipresente en la ciencia moderna, desde la logística industrial hasta la gestión de recursos naturales. El proceso estándar dicta que el investigador debe construir un modelo matemático: una abstracción que intenta capturar la esencia de un sistema mediante variables de decisión, restricciones que delimitan el espacio de soluciones factibles y funciones objetivo que miden el éxito. Sin embargo hay una "brecha de modelado" crítica en el mundo real, ya que a menudo omitimos características relevantes porque no sabemos cómo expresarlas matemáticamente o porque son desconocidas en el momento de la formulación inicial.

La metodología propuesta [1] se apoyará en el empleo del orden lexicográfico para resolver problemas de Programación Lineal Difusa (FLP por sus siglas en inglés). En la literatura, es común encontrar "funciones de ranking" que intentan simplificar un número difuso en un solo valor real para facilitar la comparación. No obstante, este proceso es reduccionista y puede llevar a soluciones subóptimas o "dominadas" (soluciones que parecen buenas pero son superadas por otras en todos los aspectos).

El método lexicográfico funciona de manera análoga a un diccionario: si dos palabras empiezan por la misma letra, se mira la segunda, y así sucesivamente. En el contexto difuso, se utilizan múltiples índices de comparación en secuencia para "desempatar" números difusos. Esto garantiza la unicidad del valor óptimo difuso de la función objetivo, una propiedad técnica vital porque asegura que el valor de la función objetivo sea consistente. Sin esta unicidad, el cálculo posterior de los grados de verdad de las preferencias subjetivas podría arrojar resultados contradictorios, invalidando el proceso de decisión.

2 Explorando la diversidad en el espacio de decisión

La técnica de Modelado para la Generación de Alternativas (MGA**)** es el motor que permite la toma de decisiones *a posteriori*. Su propósito no es encontrar una única "solución perfecta", sino generar sistemáticamente un conjunto de alternativas que cumplan dos requisitos fundamentales:

1. **Casi-optimalidad.** Que tengan un rendimiento muy cercano al óptimo matemático en los objetivos que sí pudimos modelar (por ejemplo, el beneficio económico).
2. **Diversidad máxima.** Que sean lo más diferentes posible entre sí en cuanto a los valores de sus variables de decisión.

Este enfoque reconoce que el "óptimo" matemático puede ser físicamente muy distinto de otra solución que rinda solo un 1% menos, pero que quizás sea mucho más robusta frente a factores que no pudimos incluir en las ecuaciones iniciales. Al maximizar la distancia absoluta entre las soluciones en cada iteración del proceso, el algoritmo de MGA "mapea" las diferentes formas en que se puede alcanzar un resultado similar, ofreciendo al decisor un catálogo de opciones estratégicamente diversas.

3 Proposiciones difusas y lenguaje natural

La parte esencial de la metodología es cómo manejar los objetivos no modelados mediante proposiciones difusas. Dado que una proposición difusa es una sentencia cuyo valor de verdad puede no ser absoluto porque se cuantifica en el intervalo [0, 1], se propone un marco donde el conocimiento experto se captura mediante cuatro tipos de estructuras lingüísticas: las proposiciones incondicionales simples, las proposiciones calificadas por la verdad, las proposiciones condicionales (Reglas de Control) y las proposiciones compuestas [2].

Para evaluar estas proposiciones sobre soluciones que son, en sí mismas, números difusos, se emplea una técnica de coincidencia de vocabulario que calcula el nivel de solapamiento entre el resultado matemático de la alternativa y la definición lingüística deseada. El resultado es un valor numérico exacto que indica qué tan "cierta" es una solución respecto a un deseo subjetivo.

4 Integración y selección de la solución final

Una vez generadas las alternativas mediante MGA y se han definido los objetivos no modelados mediante proposiciones, se procede a la fase de agregación. Se construye una matriz de decisión donde cada celda representa el grado de verdad de una alternativa frente a una proposición específica. Para seleccionar la mejor opción, la metodología utiliza el conectivo lógico "y" (operador de intersección), que busca la solución que maximice el grado de verdad global. Este enfoque es riguroso: una alternativa solo tendrá un valor de compatibilidad alto si satisface razonablemente bien todos los criterios lingüísticos. Nótese que una solución con mayor compatibilidad agregada es preferible porque representa el mejor equilibrio entre el modelo matemático y las sutilezas cualitativas del contexto real.

5 Demostración práctica: El dilema de la cosecha de pesquerías

Un ejemplo ilustra la metodología [3]. Se plantea un problema de captura de peces en dos periodos, un escenario clásico de gestión de recursos naturales donde los intereses económicos suelen colisionar con la sostenibilidad biológica.

A. Configuración del problema bajo incertidumbre. El modelo matemático inicial integra variables que, por su naturaleza biológica, son inherentemente inciertas y se representan mediante Números Difusos Triangulares (TFN):

- Biomasa inicial (I_1): Se estima en aproximadamente 1000 toneladas métricas, representadas por el TFN (950, 1000, 1050).
- Tasas de reproducción (r_1 y r_2): Para el primer periodo se estima en un 20% (0.15, 0.20, 0.25) y para el segundo en un 15% (0.10, 0.15, 0.20).
- Variables de decisión (x_1 y x_2): Representan la cantidad de peces capturados en cada periodo.

B. La insostenibilidad de la solución óptima referencial. Al aplicar el método lexicográfico para maximizar la captura total sin considerar factores externos, el resultado es matemáticamente impecable pero ecológicamente inviable. El sistema sugiere:

1. Periodo 1: Captura nula ($x_1 = 0$), permitiendo que la población crezca al máximo.
2. Periodo 2: Captura masiva de todo el stock acumulado (aproximadamente 1380 toneladas).

Como consecuencia la biomasa al final del segundo periodo (I_3) queda reducida a cero. Aunque se ha logrado el máximo beneficio económico posible, se ha destruido el recurso para el futuro, lo que demuestra que un modelo matemático ciego a objetivos no modelados puede llevar a decisiones desastrosas.

C. Incorporación de regulaciones de sostenibilidad (Objetivos no modelados). Suponemos tres reglas expresadas en lenguaje natural (objetivos *a posteriori*).

- Regla 1: Si la biomasa es alta y la reproducción baja en el periodo 1, entonces la captura debe ser baja o media.
- Regla 2: Si la biomasa es alta y la reproducción baja en el periodo 2, entonces la captura debe ser baja o media.
- Regla 3: La biomasa final resultante (I_3) tiene que ser media o alta.

D. Generación y evaluación de alternativas con MGA. Utilizando MGA, se puede generar un conjunto de 26 alternativas viables, que no buscan el máximo absoluto, sino que exploran el espacio de decisión buscando diversidad. Por ejemplo, se permiten desviaciones de hasta el 20% respecto al valor óptimo de captura. Para evaluar estas alternativas, se definen funciones de pertenencia para términos como por ejemplo "Bajo", "Medio" y "Alto" y cada alternativa se evalúa frente a las tres reglas calculándole su grado de verdad.
E. Selección de la solución ganadora: El Caso de la Alternativa 4. Tras construir la matriz de decisión y aplicar el conectivo lógico "y" para agregar la compatibilidad de todas las reglas, destaca la Solución No. 4:

- Nivel de Desviación: Se sitúa en un rango alrededor del 20% de pérdida respecto al óptimo matemático teórico.
- Decisión Técnica: Propone no capturar nada en el primer periodo y realizar una captura de aproximadamente 757.11 toneladas en el segundo.
- Resultado de Compatibilidad: Esta solución alcanza un grado de verdad global de 0.62, el más alto para ese nivel de desviación.

A diferencia de la solución óptima inicial, esta alternativa garantiza que la biomasa final se mantenga en niveles saludables (Regla 3), cumpliendo con las normativas de conservación sin sacrificar excesivamente el rendimiento económico. Este ejemplo demuestra que la metodología permite pasar de una decisión "matemáticamente perfecta" pero "ética/ecológicamente errónea" a una decisión equilibrada y justificada.

6 Conclusiones y futuro de la optimización inteligente

La importancia de considerar objetivos no modelados es capital, ya que suelen representar las salvaguardas éticas, ambientales o de seguridad que las ecuaciones ignoran. Perseguimos ampliar esta metodología hacia la optimización no lineal y a otras formas de incertidumbre, siendo conscientes del desafío computacional que supone transformar estos modelos en problemas de ese tipo, por lo que parece más operativo emplear algoritmos metaheurísticos para mantener la eficiencia en aplicaciones de tiempo real.

Agradecimientos

Los autores expresan su agradecimiento al proyecto PID2023-146575NB-I00 con financiación procedente de MCIU/AEI/I0.13039/501100011033, FEDER, EU y FSE+.

Referencias

1. B Pérez-Cañedo, ER Concepción-Morales. Expert Systems with App. 123, 256-269 (2019).
2. B Pérez-Cañedo, C Porras, DA Pelta, JL Verdegay. IEEE Trans. on Fuzzy Systems 31 (5), 1474-1483 (2023)
3. B Pérez-Cañedo, ER Concepción-Morales, JL Verdegay: En H. Garg (ed.) Decision Support Systems in Smart Computing: Embracing Uncertainty and Challenges. Wiley, Scrivener. 3-26 (2026). ISBN: 9781394399413 (en prensa).

Bases de implicaciones de atributos en enfoques basados en conexiones de Galois

M. Eugenia Cornejo[000-0002-8230-0044], Jesús Medina[0000-0002-3931-5873] y Francisco José Ocaña[0000-0002-7037-4994]*

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, Cádiz, España
{mariaeugenia.cornejo, jesus.medina, franciscojose.ocana}@uca.es

Resumen Este trabajo recopila resultados recientes sobre la construcción de bases de implicaciones de atributos en marcos con conexiones de Galois que se han presentado en el artículo científico *M. E. Cornejo, J. Medina, and F. J. Ocaña. Attribute implication bases from Galois connection structures, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 49:27292753, 2025.*

Palabras clave: Implicaciones de atributos · conexión de Galois · bases · multiadjunto · retículos de conceptos multiadjunto

1. Introducción

Uno de los principales desafíos en la teoría del Análisis de Conceptos Formales es la determinación de un subconjunto no redundante de implicaciones de atributos válidas a partir del cual se puedan derivar todas las demás, es decir, una base de implicaciones de atributos. Se han propuesto diversos enfoques para su obtención tanto en el marco clásico [3,4,5] como en el residuado [1], sin embargo, los mecanismos subyacentes a estos procedimientos no son equivalentes en general. En [2], proponemos un procedimiento novedoso para calcular bases de implicaciones de atributos en contextos donde se pueda definir una conexión de Galois, con especial énfasis en el marco multiadjunto, uno de los entornos difusos más generales donde los operadores de formación de conceptos forman una conexión de Galois. El cálculo de estas bases está inspirado en la metodología clásica de Guigues-Duquenne [5] y se basa en la noción de nodo no redundante minimal. Este enfoque explota la estructura de clausura inducida por la conexión de Galois para definir las nociones clave para la teoría de implicaciones de atributos.

2. Nodos no redundantes minimales en retículos de conceptos multiadjuntos

El objetivo principal de esta sección es presentar una extensión de la noción de nodo no redundante minimal al marco multiadjunto. Por ello, necesitamos

* Autor de correspondencia.

considerar un marco multiadjunto $(L_1, L_2, P, \preceq_1, \preceq_2, \leq, \&_1, \swarrow^1, \nwarrow_1, \ldots, \&_n, \swarrow^n, \nwarrow_n)$ y un contexto (A, B, R, σ) junto con su correspondiente retículo de conceptos multiadjunto $(\mathcal{M}, \preceq)$. Comenzamos introduciendo la noción de implicación informativa.

Definición 1. Dados $f_1, f_2 \in L_1^A$, decimos que una implicación de atributos $f_2 \Leftarrow f_1$ es *informativa* si $f_2 \preceq_1 f_1^{\downarrow\uparrow}$ y $f_2 \not\preceq_1 f_1$.

Esta noción nos permite establecer una relación de orden entre las implicaciones de atributos completamente válidas, es decir, aquellas implicaciones de atributos cuyo grado de validez es igual a 1, con el fin de determinar cuándo una implicación es más informativa que otra. El conjunto de todas las implicaciones de atributos completamente válidas se denotará como $\mathcal{F}_t$.

Definición 2. Dados $f_1, f_2, f_3, f_4 \in L_1^A$, decimos que una implicación de atributos $f_2 \Leftarrow f_1$ es *al menos tan informativa como* $f_4 \Leftarrow f_3$, lo cual se denota como $f_4 \Leftarrow f_3 \sqsubseteq f_2 \Leftarrow f_1$, si $f_1 \preceq_1 f_3$ y $f_4 \preceq_1 f_2$.

Además, si asumimos que L_1 es finito, el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{F}_t, \sqsubseteq)$ admite elementos maximales. Estos elementos representan las implicaciones más informativas dentro del contexto dado.

Definición 3. Dados dos subconjuntos de atributos $f_1, f_2 \in L_1^A$, decimos que la implicación de atributos $f_2 \Leftarrow f_1 \in \mathcal{F}_t$ es una *implicación informativa maximal*, si es un elemento maximal del conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{F}_t, \sqsubseteq)$, es decir, $f_2 \Leftarrow f_1 \not\sqsubseteq f_4 \Leftarrow f_3$ para todo $f_4 \Leftarrow f_3 \in \mathcal{F}_t$. El conjunto de todas las implicaciones informativas maximales de $(\mathcal{M}, \preceq)$ se denotará como $\mathbf{M}\mathcal{F}_t$.

Las implicaciones de atributos maximales pueden caracterizarse en términos de subintensiones irreducibles, cuya definición se introduce a continuación.

Definición 4. Sea $i \in Int(\mathcal{M})$ una intensión de un concepto de $(\mathcal{M}, \preceq)$. Llamamos *subintensión* de i a cualquier subconjunto f de i tal que $f^{\downarrow\uparrow} = i$. Denotamos por $\mathcal{S}(i)$ al conjunto de todas las subintensiones de i. Decimos que una subintensión es *irreducible* si es un conjunto minimal en $\mathcal{S}(i)$. La unión de todas las subintensiones irreducibles se denota por $\mathcal{IS}_{\mathcal{M}}$.

Estos elementos desempeñan un papel fundamental para identificar las implicaciones informativas maximales, tal como se presenta en la siguiente proposición.

Proposición 1. *Dado $i \in Int(\mathcal{M})$, si $\mathcal{S}(i) \neq \{i\}$, entonces los conjuntos no cerrados $f \in L_1^A$ que sirven como antecedentes para las implicaciones informativas maximales $i \Leftarrow f$ son las subintensiones irreducibles de i.*

Como consecuencia de este resultado, el conjunto de implicaciones informativas maximales puede expresarse como $\mathbf{M}\mathcal{F}_t = \{f^{\downarrow\uparrow} \Leftarrow f \mid f \in \mathcal{IS}_{\mathcal{M}}\}$. La relevancia de este conjunto radica en su relación para la construcción de bases sustentadas en el concepto de *nodo no redundante minimal*. Estos subconjuntos de atributos pueden caracterizarse a través del proceso conocido como presaturación, el cual constituye un paso clave en la construcción de la base propuesta por Guigues y Duquenne [5].

Definición 5. Dado un sistema de implicaciones informativas $\mathcal{T}$ y un subconjunto difuso de atributos $f \in L_1^A$, se define el conjunto:

$$\overline{f}^{\mathcal{T}} = \bigvee \left(\{f\} \cup \{h^{\downarrow\uparrow} \mid h \prec_1 f, h \in J_{\mathcal{T}},\ y\ h^{\downarrow\uparrow} \neq f^{\downarrow\uparrow}\} \right)$$

como el $\mathcal{T}$-*presaturado* de f, donde $J_{\mathcal{T}} = \{h \in L_1^A \mid \Leftarrow h \in \mathcal{T}\}$.

Basándonos en el operador de presaturación, podemos caracterizar los denominados nodos no redundantes.

Lema 1. *Dado un sistema de implicaciones informativo $\mathcal{T}$, un subconjunto difuso de atributos $f \in L_1^A$ es un nodo no redundante si y solo si $f = \overline{f}^{\mathcal{T}}$ y $f \neq f^{\downarrow\uparrow}$.*

Finalmente, introducimos la noción de nodo no redundante minimal, la cual desempeña un papel crucial en la caracterización de las bases implicacionales.

Definición 6. Dado un sistema de implicaciones informativo $\mathcal{T}$, un *nodo no redundante minimal* es un nodo no redundante $f \in L_1^A$ tal que para cada subconjunto $h \preceq_1 f$, si $h^{\downarrow\uparrow} = f^{\downarrow\uparrow}$ y $h = \overline{h}^{\mathcal{T}}$, entonces $h = f$. El conjunto de nodos no redundantes minimales se denotará como $\mathcal{N}_0$.

3. Bases de implicaciones de atributos en retículos de conceptos multiadjuntos

Como hemos comentado en la sección anterior, los nodos minimales tienen una relación directa con la construcción de bases. Concretamente, las bases pueden obtenerse considerando únicamente las clases de equivalencia generadas por cada nodo no redundante minimal. Este resultado constituye uno de los pilares fundamentales de esta contribución.

Teorema 1. *Sea $(\&, \swarrow, \nwarrow)$ un triple adjunto con respecto a $(L_1, \preceq_1)$ tal que $\nwarrow$ es una implicación forzada. Dado un sistema de implicaciones de atributos informativo $\mathcal{M}_A$-completo $\mathcal{T}$, y una familia de subconjuntos difusos de atributos $\mathcal{F}$ compuesta por una única clase representativa $[f]_{\cong^{\mathcal{T}}}$, con $f \in \mathcal{N}_0$, cualquier sistema de implicaciones definido como:*

$$\mathfrak{B} = \{h^{\downarrow\uparrow} \Leftarrow h \mid h \in \mathcal{F}\}$$

constituye una base, es decir, es $\mathcal{M}_A$-completo y no redundante.

Como consecuencia del resultado anterior, es posible generar diferentes bases para un mismo contexto. Por ejemplo, se puede distinguir entre bases de implicaciones de atributos cuyos antecedentes son exclusivamente nodos minimales y aquellas cuyos antecedentes corresponden únicamente a subintensiones irreducibles. Este hecho queda reflejado en la siguiente proposición.

Proposición 2. *Sea* $(\&, \swarrow, \nwarrow)$ *un triple adjunto respecto a* $(L_1, \preceq_1)$ *tal que* $\nwarrow$ *es una implicación forzada. Dado un sistema de implicaciones informativo* $\mathcal{M}_A$*-completo* $\mathcal{T}$*, y una familia de subintensiones irreducibles* $\mathcal{F}_I$ *seleccionadas de cada clase* $[f]_{\cong}$*, donde* $f \in \mathcal{N}_0$*. Los conjuntos de implicaciones de atributos definidos como:*

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{N}_0} = \{f^{\downarrow\uparrow} \Leftarrow f \mid f \in \mathcal{N}_0\}$$
$$\mathfrak{B}_I = \{l^{\downarrow\uparrow} \Leftarrow l \mid l \in \mathcal{F}_I\}$$

son $\mathcal{M}_A$*-completos y no redundantes.*

4. Conclusiones y trabajo futuro

Este trabajo presenta un procedimiento general para construir bases de implicaciones de atributos a partir de datos, aplicable a distintos enfoques basados en conexiones de Galois. Este enfoque se ha particularizado en el marco de los retículos de conceptos multiadjuntos, lo cual ha permitido el desarrollo de mecanismos formales para obtener bases de implicaciones desde perspectivas complementarias, consolidando una visión unificada en contextos difusos. Como trabajo futuro, se contempla aplicar los resultados obtenidos para evaluar su utilidad práctica en la extracción automática de conocimiento. En particular, se continuarán los estudios aplicados en el ámbito de las energías renovables propuestos por el Grupo Energético de Puerto Real, centrándose en la detección de anomalías tanto en instalaciones fotovoltaicas como en redes de abastecimiento de agua.

Agradecimientos Trabajo parcialmente subvencionado por el proyecto PID2022-137620NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE, por el proyecto TED2021-129748BI00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por la Unión Europea NextGenerationEU/PRTR, y por el proyecto FEDER-UCA-2024-A2-04 financiado por el Programa Operativo FEDER Andalucía 2021-2027 y la Consejería de Universidad, Investigación e Innovación, Junta de Andalucía.

Referencias

1. Belohlávek, R., Vychodil, V.: Attribute dependencies for data with grades I,. International Journal of General Systems **45**(7-8), 864–888 (2016)
2. Cornejo, M.E., Medina, J., Ocaña, F.J.: Attribute implication bases from Galois connection structures. Mathematical Methods in the Applied Sciences **49**(4), 2729–2753 (2026)
3. Ganter, B., Wille, R.: Formal Concept Analysis: Mathematical Foundation. Springer Verlag (1999)
4. Ganter, B.: Two basic algorithms in concept analysis. In: Kwuida, L., Sertkaya, B. (eds.) Formal Concept Analysis. pp. 312–340. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg (2010)
5. Guigues, J.L., Duquenne, V.: Familles minimales d'implications informatives résultant d'un tableau de données binaires. Mathématiques et Sciences Humaines **95**, 5–18 (1986)

Combinación entre funciones de overlap y operadores OWA

M. Ferrero-Jaurrieta[1][0000−0002−6854−3437], J. Baz[2][0000−0003−1142−6077], N. Rico[3][0000−0002−6169−4523], and H. Bustince[1][0000−0002−1279−6195]

[1] Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra (UPNA), Campus Arrosadía s/n, 31006, Pamplona, España
mikel.ferrero@unavarra.es
[2] Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino, Corso Duca degli Abruzzi, 24, Torino, I-10129, Italy juan.bazgonzalez@polito.it
[3] Departamento de Informática, Universidad de Oviedo, C. San Francisco, 3, 33003, Oviedo, España riconoelia@uniovi.es

Abstract. El presente es un trabajo en progreso donde se presentan resultados preliminares (ongoing research). En este trabajo se presentan los operadores OWA basados en funciones de overlap, los cuales son generalizaciones tanto de los operadores OWA como de las funciones de overlap. Se presentan unos resultados preliminares así como líneas de continuación de trabajo.

Keywords: Funciones de agregación · Operadores OWA · Funciones de overlap.

1 Introducción

Los operadores OWA [8] son una familia de funciones que han sido objeto de estudio de la comunidad científica en las cuatro últimas décadas, habiéndose presentado diversas generalizaciones, extensiones y aplicaciones de estos operadores. Una generalización que cobra relevancia en el contexto de la toma de decisión multicriterio, pero no sólo, es el operador OWA basado en t-normas (TOWA) [9]. En ese contexto, se entiende que el grado de satisfacción se basa en una operación que tiene en cuenta los distintos valores asociados a cada subconjunto y que, implícitamente, al igual que en otros enfoques basados en operadores OWA, se utiliza el mínimo. Por ello, en lugar de utilizar el mínimo, utiliza t-normas, permitiendo una "interacción sinérgica" entre la satisfacción de los argumentos [9].

Para abordar limitaciones en el uso de t-normas en la fusión de información debido a la imposición del elemento neutro, la asociatividad y la falta de continuidad, se introdujeron las funciones de overlap [2], contextualizadas en el ámbito de la clasificación y el procesamiento de imágenes. A nivel de clasificación de las funciones de agregación, las funciones de overlap constituyen una familia de funciones que pueden ser conjuntivas, mezcla o promedio [1]. Motivados por este contexto, proponemos los operadores OWA basados en funciones de overlap;

una nueva familia de funciones de agregación que constituyen la mezcla y generalización de los operadores OWA y las funciones de overlap. Esta nueva familia de operadores permite compensar la conjuntividad de los operadores, así como los beneficios que permite la propiedad de continuidad en los operadores. En este trabajo preliminar presentamos la definición de estos operadores, la relación con otras funciones de agregación y el estudio de algunas de sus propiedades. Por último, presentamos las futuras líneas de investigación en este contexto.

2 Definiciones preliminares

Los operadores OWA basados en funciones de overlap están relacionados con otras familias de operadores, cuya definición se recuerda brevemente a continuación.

Definición 1 ([6]). *Una aplicación* $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *es una t-norma si es creciente, conmutativa, asociativa y* $T(x,1) = x$*, para todo* $x \in [0,1]$*.*

Definición 2 ([5]). *Una aplicación* $O\colon [0,1]^n \to [0,1]$ *es una función de overlap* n*-dimensional si es simétrica, creciente, continua y cumple que* $O(\mathbf{x}) = 0$ *si y solo si* $\prod_{i=1}^n x_i = 0$ *y que* $O(\mathbf{x}) = 1$ *si y solo si* $\prod_{i=1}^n x_i = 1$*.*

Definición 3 ([8]). *Sea* $n \in \mathbb{N}$*,* $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in [0,1]^n$*, tal que* $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ *y* $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$*. Un operador OWA (Ordered Weighted Averaging) es una aplicación* $OWA_{\mathbf{w}}\colon [0,1]^n \to [0,1]$ *dada por:* $OWA_{\mathbf{w}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n w_i x_{(i)}$*, donde* $(\ )$ *es una permutación de* $\mathbf{x}$ *tal que* $x_{(1)} \geq \ldots \geq x_{(n)}$*.*

Definición 4 ([9]). *Sea* $n \in \mathbb{N}$*,* $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in [0,1]^n$*, tal que* $\sum_{i=1}^n w_i = 1$*,* $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *una t-norma y* $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$*. Un operador TOWA (OWA basado en t-norma) es una aplicación* $TOWA_{\mathbf{w}}\colon [0,1]^n \to [0,1]$ *dada por* $TOWA_{\mathbf{w}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n w_i T(x_{(1)}, \ldots x_{(i)})$ *donde* $(\ )$ *es una permutación de* $\mathbf{x}$ *tal que* $x_{(1)} \geq \ldots \geq x_{(n)}$*.*

Se considera, salvo que se especifique lo contrario, que el dominio de las funciones consideradas es siempre $[0,1]^n$.

3 Operadores OWA basados en funciones de overlap

Definición 5. *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in [0,1]^n$*, tal que* $\sum_{i=1}^n w_i = 1$*. Sea* $\mathbf{O} = (O_1, \ldots, O_n)$ *una secuencia de funciones de overlap* k*-dimensionales, tal que* $O_k\colon [0,1]^k \to [0,1]$*, para todo* $k \in \{1, \ldots, n\}$*. El operador OWA basado en funciones de overlap es una aplicación* $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}\colon [0,1]^n \to [0,1]$ *dada por la siguiente expresión:*

$$\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} w_k O_k(x_{(1)}, \ldots x_{(k)}) \tag{1}$$

donde $(\ )$ *es una permutación de* $\mathbf{x}$ *tal que* $x_{(1)} \geq \ldots \geq x_{(n)}$*.*

Obsérvese que, en la Definición 5, la función $O_1\colon [0,1] \to [0,1]$ no es una función de overlap propiamente dicha. En este sentido, cabe señalar que $O_1(x) = x$ no se cumple en general para todo $x \in [0,1]$. En particular, requerimos a O_1 ser una función continua y creciente que satisface $O_1(0) = 0$ y $O(1) = 1$, lo que sería la concreción de la función de overlap a aridad 1. Por otro lado, nótese que si en la Definición 5 consideramos $O_1(x) = x$ y $O_k(x_1, \ldots, x_k) = \min(x_1, \ldots, x_k)$, para todo $k \in \{2, \ldots, n\}$ se recupera el operador OWA operator clásico [8]. Además, si $O_1(x) = x$ y $O_k(x_1, \ldots, x_k) = T(x_1, \ldots, x_k)$, donde $T\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ es una t-norma, recuperamos el operador TOWA [9]. En primer lugar, se prueban algunas propiedades básicas de este tipo de operadores.

Proposición 1. *Todo operador OWA basado en funciones de overlap $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}$ es simétrico, creciente, continuo, y cumple que si $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}(\mathbf{x}) = 0$ entonces $\prod_{i=1}^n x_i = 0$ y que si $\prod_{i=1}^n x_i = 1$ entonces $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}(\mathbf{x}) = 1$.*

Proposición 2. *Sea $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}$ un operador OWA basado en funciones de overlap. Entonces,*

- *$\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}(\mathbf{x}) = 0 \iff \prod_{i=1}^n x_i = 0$ se cumple si y solo si $w_n = 1$*
- *$\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}(\mathbf{x}) = 1 \iff \prod_{i=1}^n x_i = 1$ se cumple si y solo si $w_n > 0$.*

Proposición 3. *Sean $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}_1}$ y $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}_2}$ dos operadores OWA basados en funciones de overlap. Entonces, para todo $\lambda \in [0,1]$, se tiene que*

$$\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}(\mathbf{x}) = \lambda \Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O_1}}(\mathbf{x}) + (1-\lambda)\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O_2}}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in [0,1]^n,$$

donde $O_k(x_1, \ldots, x_k) = \lambda O_{k,1}(x_1, \ldots, x_k) + (1-\lambda) O_{k,2}(x_1, \ldots, x_k)$.

A continuación, nos centramos en su dualidad.

Proposición 4. *Sea $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}$ un operador OWA basado en funciones de overlap. Sea $f_k : [0,1]^n \to [0,1]$ una función definida como $f_k(\mathbf{x}) = O_k(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)})$ para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ and $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, si $\mathbf{w}$ es simétrico y f_{n-k+1} es el dual de f_k, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}$ es autodual.*

Proposición 5. *Sean $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}$ y $\Omega_{\mathbf{v},\mathbf{P}}$ dos operadores OWA basados en funciones de overlap. Sean $f_k, g_k : [0,1]^n \to [0,1]$ dos funciones definidas como $f_k(\mathbf{x}) = O_k(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)})$ y $g_k(\mathbf{x}) = P_k(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)})$, para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ y $k \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, si f_{n-k+1} es dual de g_k para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ y $w_k = v_{n-k+1}$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}$ es el dual de $\Omega_{\mathbf{v},\mathbf{P}}$.*

Finalmente, damos una propiedad de monotonía respecto al vector de pesos.

Proposición 6. *Sean $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}$ y $\Omega_{\mathbf{v},\mathbf{O}}$ dos operadores OWA basados en funciones de overlap tal que existe una función de overlap n-dimensional tal que $O_k(x_1, \ldots, x_i) = O(1, \ldots, 1, x_1, \ldots, x_k)$ para todo $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$ y $k \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, si $\sum_{i=0}^k w_i \leq \sum_{i=0}^k v_i$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, se cumple*

$$\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}(\mathbf{x}) \geq \Omega_{\mathbf{v},\mathbf{O}}(\mathbf{x}),$$

para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$.

4 Líneas futuras de trabajo

Como continuación directa de los resultados preliminares presentados en la sección anterior, el principal objetivo del trabajo es la definición del operador OWA basado en funciones de grouping [3], así como estudiar su dualidad con respecto a los operadores OWA basados en funciones de overlap. Por otro lado, un segundo objetivo consistirá en medir el nivel de disjuntividad o medida de *orness* [8] de la nueva familia de operadores, teniendo en cuenta las aproximaciones presentadas en la literatura para funciones promedio y para funciones de agregación en general, en este contexto concreto. Por otro lado, teniendo en cuenta que las funciones de overlap no son funciones asociativas en general, teniendo en cuenta resultados previos [4, 7], se podría considerar la recursividad, en concreto, relacionando las secuencias de funciones de overlap así como la nueva familia de operadores con las funciones de agregación extendibles recursivamente. En [7], se utilizan funciones de overlap extendidas de forma recursiva en el proceso de agregación de clustering incremental, y en ese sentido se explorará la agregación incremental desde la perspectiva de la familia de operadores propuesta.

Acknowledgments. Este trabajo ha sido financiado por la Agencia Estatal de Investigación (PID2022-136627NB-I00, MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033/), el Ministerio de Ciencie e Innovación (PID2022-139886NB-I00), el Principado de Asturias (SEK-25-GRU-GIC-24-018) y la Unión Europea (SCIMIN-CRM 101177746).

Disclosure of Interests. No hay conflictos de interés.

References

1. Beliakov, G., Bustince, H., Calvo, T.: A Practical Guide to Averaging Functions, vol. 329. Springer (2016)
2. Bustince, H., Fernández, J., Mesiar, R., Montero, J., Orduna, R.: Overlap functions. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **72**(3-4), 1488–1499 (2010)
3. Bustince, H., Pagola, M., Mesiar, R., Hullermeier, E., Herrera, F.: Grouping, overlap, and generalized bientropic functions for fuzzy modeling of pairwise comparisons. IEEE Transactions on fuzzy systems **20**(3), 405–415 (2011)
4. Cutello, V., Montero, J.: Recursive connective rules. International Journal of Intelligent Systems **14**(1), 3–20 (1999)
5. Gómez, D., Rodriguez, J.T., Montero, J., Bustince, H., Barrenechea, E.: n-dimensional overlap functions. Fuzzy Sets and Systems **287**, 57–75 (2016)
6. Klement, E., Mesiar, R., Pap, E.: Triangular Norms. Trends in Logic, Springer Netherlands (2000)
7. Urio-Larrea, A., Camargo, H., Lucca, G., Asmus, T., Marco-Detchart, C., Schick, L., Lopez-Molina, C., Andreu-Perez, J., Bustince, H., Dimuro, G.P.: Data stream clustering: introducing recursively extendable aggregation functions for incremental cluster fusion processes. IEEE Transactions on Cybernetics **55**(3), 1421–1435 (2025)
8. Yager, R.R.: On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics **18**(1), 183–190 (1988)
9. Yager, R.R.: Extending multicriteria decision making by mixing t-norms and OWA operators. International Journal of Intelligent Systems **20**(4), 453–474 (2005)

The Functional Choquet Integral

H. Bustince[1], D. García Zamora[2], S. Montes[3], J. Montero[4], G.P. Dimuro[5], L. De Miguel[1,8], J. Fernandez[1], R. Santiago[6], and A. F. Roldán López de Hierro[7]

[1] Dept. of Statistics, Computer Science and Mathematics, Universidad Publica de Navarra (UPNA), Campus Arrosadia s/n, Pamplona, 31006, Spain
{bustince, laura.demiguel, fcojavier.fernandez}@unavarra.es
[2] Dept. of Mathemtics, Universidad de Jaen, Campus Las Lagunillas, Jaen, 23071, Spain dgzamora@ujaen.es
[3] Department of Statistics and Operational Research and Mathematics Didactics, Universidad de Oviedo, Campus de Llamaquique, Oviedo, 32007, Spain
montes@uniovi.es
[4] Faculty of Mathematics and Instituto de Matematica Interdisciplinar, Complutense University, Plaza de las Ciencias,3, Madrid, 28040, Spain
monty@mat.ucm.es
[5] Centro de Ciências Computacionais, Universidade Federal do Rio Grande, Av. Italia km 08, 96203-900, Rio Grande, Brazil
gracalizdimuro@furg.br
[6] Dept. de Informatica e Matematica Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Campus Universitario, S/N, Lagoa Nova, 59078-970, Natal, Brazil
regivan@dimap.ufrn.br
[7] Dept. of Statistics and Operational Research, Universidad de Granada, Facultad de Ciencias, Granada, 18071, Spain
aroldan@ugr.es
[8] IdiSNA, Instituto de Investigación Sanitaria de Navarra

Abstract. In this work we follow the paper [1] to introduce the notion of functional Choquet integral (FCI), a new family of fusion functions obtained by replacing the capacity values in the discrete Choquet integral with data-dependent functions applied to the ordered tail of the input vector. Unlike previous extensions, different functions are allowed at each summation term, providing additional modelling flexibility while preserving the ordered-difference structure of the Choquet integral.

Keywords: Fusion function · Choquet integral· Aggregation function.

1 Introduction

In this work we discuss the concept of functional Choquet integrals introduced in [1]. To define these functions, we replace the fuzzy measures $\mu(\{\sigma(i), \ldots, \sigma(n)\})$ which appear in the usual definition of the Choquet integral [3] by a value $F_{n+1-i}(t_{\sigma(i)}, \ldots, t_{\sigma(n)})$ given in terms of a family of functions which take into account only a subset of the inputs.

It is important to remark that, contrary to the case of [2], the used functions may be different from one term to another. Furthermore, no a priori conditions

are imposed on the functions F_{n+1-i}, so we can get a great deal of flexibility. To get further simplification, we restrict our study to fusion functions that depend only on some of the greatest components in the considered input, following the same philosophy as the usual definition of the discrete Choquet integral in terms of the fuzzy measure.

In the following, we introduce the new notion of Functional Choquet integral and review some of its main properties studied in [1].

2 The functional Choquet integral

Let $\mathcal{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ be a vector of fusion functions $F_i : [0,1]^i \to [0,1]$, that is, each F_i has exactly i arguments.

Definition 1. *The* functional Choquet integral *(*FCI*, for short) associated to the family $\mathcal{F}$ is the mapping $C_{\mathcal{F}} : [0,1]^n \to [0,+\infty[$ defined, for each $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [0,1]^n$, by:*

$$C_{\mathcal{F}}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n} (t_{\sigma(i)} - t_{\sigma(i-1)}) \cdot F_{n+1-i}(t_{\sigma(i)}, \ldots, t_{\sigma(n)}), \tag{1}$$

where $\sigma : \langle n \rangle \to \langle n \rangle$ is an increasing permutation of the inputs, that is, $t_{\sigma(0)} \leq t_{\sigma(1)} \leq \ldots \leq t_{\sigma(n)}$, with the convention that $t_{\sigma(0)} = 0$.

As a first example consider the case when the functions of the vector $\mathcal{F}$ are constant on their respective domains. For instance, suppose that $F_i \equiv a_i$ for all $i \in \langle n \rangle$, where $a_i \in [0,1]$. Then, for all $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in [0,1]^n$,

$$C_{\mathcal{F}}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i} \, (t_{\sigma(i)} - t_{\sigma(i-1)})$$
$$= a_n \, t_{\sigma(1)} + a_{n-1} \, (t_{\sigma(2)} - t_{\sigma(1)}) + \ldots + a_2 \, (t_{\sigma(n-1)} - t_{\sigma(n-2)}) + a_1 \, (t_{\sigma(n)} - t_{\sigma(n-1)}).$$

Then:

- If $F_i \equiv 1$ for all $i \in \langle n \rangle$ (that is, $\mathcal{F} \equiv \mathbf{1}_n$), then $C_{\mathcal{F}}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \max\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ for all $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in [0,1]^n$.
- If $F_i \equiv 0$ for all $i \in \langle n-1 \rangle$ and $F_n \equiv 1$ (that is, $\mathcal{F} \equiv (0, 0, \ldots, 0, 1)$), then $C_{\mathcal{F}}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \min\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ for all $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in [0,1]^n$.
- If $F_i \equiv a_i$ for all $i \in \langle n \rangle$ and $1 = a_n \geq a_{n-1} \geq \ldots \geq a_2 \geq a_1 \geq a_0 = 0$, then $C_{\mathcal{F}}$ is the OWA operator associated to the weighting vector $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in [0,1]^n$ defined by $\omega_i = a_{n+1-i} - a_{n-i}$ for all $i \in \langle n \rangle$.

3 Some properties of the Functional Choquet Integral

3.1 Idempotency and Homogeneity

Proposition 1. *The FCI $C_{\mathcal{F}}$ associated to the vector $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ is idempotent if, and only if, $F_n(\mathbf{t}_n) = 1$ for all $t \in (0,1]$.*

In particular, we have the following result.

Corollary 1. *The FCI $C_{\mathcal{F}}$ associated to the vector $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ always satisfies $C_{\mathcal{F}}(\mathbf{0}_n) = 0$, and it verifies the boundary condition $C_{\mathcal{F}}(\mathbf{1}_n) = 1$ if, and only if, $F_n(\mathbf{1}_n) = 1$.*

Regarding homogeneity, we have the following result.

Theorem 1. *The FCI $C_{\mathcal{F}}$ associated to the vector $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ is 1-homogeneous if, and only if, each function F_i is 0-homogeneous.*

3.2 Monotonicity

In order to study monotonicity, we first introduce the following definition.

Definition 2. *A vector of functions $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, where $F_i : \Delta_i \to [0,1]$ for each $i \in \langle n \rangle$, is* increasing *if:*

$$F_n(t_n, t_{n-1}, \ldots, t_2, t_1) \geq F_{n-1}(t_{n-1}, \ldots, t_2, t_1) \geq \ldots \geq F_2(t_2, t_1) \geq F_1(t_1) \quad (2)$$

for each $t_1, t_2, \ldots, t_n \in (0,1]$ such that $0 < t_n \leq t_{n-1} \leq \ldots \leq t_2 \leq t_1$.

Then we have the following result.

Lemma 1. *If the FCI $C_{\mathcal{F}} : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ is increasing, then the vector of functions $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ is increasing.*

But the increasingnes of the FCI $C_{\mathcal{F}}$ is not enough to guarantee that each function of the vector $\mathcal{F}$ is increasing, as we illustrate in the following example.

Example 1. Suppose that the functions of the vector $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ are given by:

$$F_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{t_2 \cdot t_3 \cdot \ldots \cdot t_n}{t_1}, \qquad F_i \equiv 0 \text{ on } \Delta_i \text{ for all } i \in \langle n-1 \rangle.$$

Recall that F_n is defined on $\Delta_n = \{\, (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in [0,1]^n : 0 < t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n \,\}$, so $t_1 > 0$. Clearly $\mathcal{F}$ is increasing in the sense of Definition 2. Furthermore, this vector gives place to the FCI such that

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{F}}(t_1, t_2, \ldots, t_n) &= t_{\sigma(1)} \cdot F_n(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \ldots, t_{\sigma(n)}) = t_{\sigma(1)} \cdot \frac{t_{\sigma(2)} \cdot t_{\sigma(3)} \cdot \ldots \cdot t_{\sigma(n)}}{t_{\sigma(1)}} \\ &= t_{\sigma(2)} \cdot t_{\sigma(3)} \cdot \ldots \cdot t_{\sigma(n)}, \end{aligned}$$

which is increasing on each argument. However, the function F_n is strictly decreasing on its first variable. Therefore, increasingness of $C_{\mathcal{F}}$ does not imply coordinatewise increasingness of each F_i.

Regarding the converse, we introduce the notion of double increasingness.

Definition 3. *A vector of functions $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ is* double-increasing *when$\mathcal{F}$ is increasing and, for each $i \in \langle n \rangle$, the function $F_i : \Delta_i \to [0,1]$ is increasing.*

Finally we get the following main result.

Theorem 2. *If the vector $\mathcal{F}$ is double-increasing, then the FCI $C_{\mathcal{F}}$ is increasing.*

Corollary 2. *If the vector $\mathcal{F}$ is double-increasing and $F_n(\mathbf{1}_n) = 1$, then the FCI $C_{\mathcal{F}}$ is an aggregation function.*

Corollary 3. *Let $\{\, \mathcal{A}_i : [0,1]^i \to [0,1] \,\}_{i=1}^n$ be a set of n aggregation functions such that:*

$$\mathcal{A}_n(t_n, t_{n-1}, \ldots, t_2, t_1) \geq \mathcal{A}_{n-1}(t_{n-1}, \ldots, t_2, t_1) \geq \ldots \geq \mathcal{A}_2(t_2, t_1) \geq \mathcal{A}_1(t_1)$$

for each $t_1, t_2, \ldots, t_n \in (0,1]$ such that $0 < t_n \leq t_{n-1} \leq \ldots \leq t_2 \leq t_1$. If we define $F_i = \mathcal{A}_i|_{\Delta_i}$ (i.e., as the restriction of $\mathcal{A}_i$ to Δ_i) for all $i \in \langle n \rangle$, then the FCI $C_{\mathcal{F}}$ is an aggregation function.

4 Conclusions

In this work we have presented the definition of Functional Choquet integral and some of its main properties, as discussed in [1]. As commented in that work, this new family of operators provides a large amount of flexibility for possible applications in deep learning, decision making or classification, among others.

Acknowledgements

This work has been partially supported by Grant C-EXP-153-UGR23 funded by Consejería de Universidad, Investigación e Innovación, by ERDF Andalusia Program 2021-2027; by Grant PID2024-157156OB-I00 and by the research Project PID2024-155289NB-I00, both funded by MICIU/AEI/10.13039/501100011033 and ERDF/EU. Additional support was provided by Project SEK-25-GRU-GIC-24-018 funded by the Government of the Principality of Asturias ; and by the European Union under Grant Agreement No. 101132914 (AI4RA).

References

1. Bustince, H., García-Zamora, D., Ferreira, E., Montes, S., Montero, J., Dimuro, G., De Miguel, L., Fernandez, J., Santiago, R., Roldán López de Hierro, A.F., The Functional Choquet Integral, submitted to Fuzzy Sets and Systems.
2. Bustince, H., Mesiar, R., Dimuro, G., Fernandez, J., Lafuente, J., Baets, B.D., 2026. Choquet-inspired aggregation functions. Information Fusion 126, 103499. doi:https://doi.org/10.1016/j.inffus.2025.103499
3. Choquet, G., 1953–1954. Theory of capacities. Annales de l'Institut Fourier 5, 131–295. URL: http://eudml.org/doc/73714.

Medidas de capacidad y análisis topológico de datos*

Alba Lirón-León[1 [0009−0005−7969−6809]**], Inmaculada Gutiérrez[2,4 [0000−0002−7103−393X]] J.Tinguaro Rodríguez[1,3 [0000−0003−4989−2348]], and Daniel Gómez[2,4 [0000−0001−9548−5781]]

[1] Facultad de CC. Matemáticas, UCM
[2] Facultad de Estudios Estadísticos, UCM
[3] Instituto de Matemática Interdisciplinar, UCM
[4] Instituto Universitario de Estadística y Ciencia de Datos, UCM

Abstract. Se presenta una investigación en curso que relaciona el análisis topológico de datos y la teoría de medidas de capacidad. Un resultado preliminar permite obtener filtraciones de complejos simpliciales a partir de medidas de capacidad. Se ilustra este resultado mediante ejemplos.

Keywords: Medidas de Capacidad · Complejos Simpliciales · Análisis Topológico de Datos

1 Introducción

El análisis topológico de datos (ATD, [1]) es un campo de las matemáticas cuyo objetivo es determinar, mediante técnicas topológicas, propiedades cualitativas de conjuntos de datos. Recientemente ha cobrado una gran relevancia en el estudio de problemas en que los datos presentan estructuras subyacentes complejas cuya comprensión, representación y tratamiento es crucial para la obtención de soluciones adecuadas. Por otro lado, las medidas de capacidad (MC, [5]) son una herramienta que permite representar información y relaciones de diverso orden (como importancia, coste, interacción, dependencia o pertenencia colectiva) sobre los elementos de un conjunto.

Este trabajo presenta e ilustra un resultado preliminar de una investigación en curso orientada a establecer vínculos entre las MC y el ATD. Este resultado establece un mecanismo para construir una filtración de complejos simpliciales a partir de una medida de capacidad, y hace posible representar una MC mediante un código de barras de homología persistente, una herramienta de ATD que proporciona una descripción multiescala de la estructura topológica (componentes conexas, ciclos, cavidades, etc.) de un objeto o conjunto de datos a partir de

* Este resultado es parte del proyecto de I+D+i PID2024-155289NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y FEDER/UE. La primera autora ha sido contratada mediante la ayuda PREP2024-003189 financiada por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y "FSE+".

** Autor de Correspondencia: aliron@ucm.es

una filtración del mismo (ver e.g. [2]). Así pues, este enfoque permite estudiar la estructura topológica inducida por una MC.

2 Preliminares

Definición 1. Sea X un conjunto finito. Un **complejo simplicial abstracto** [6] L sobre X es una familia de subconjuntos no vacíos de X tales que, si $\sigma \in L$ y $\tau \subset \sigma$ es no vacío, entonces $\tau \in L$. En particular, los **vértices** de L son los elementos del conjunto X y un **símplice abstracto** σ es cualquier elemento de L. Su dimensión se define como $\dim(\sigma) = \#\sigma - 1$.

Definición 2. Una **filtración** [3] en un complejo simplicial K consiste en una familia de subcomplejos $\mathcal{F} = \{K_i\}_{i \in I}$ indexada sobre un conjunto totalmente ordenado I tal que si $i \leq j$, entonces $K_i \subset K_j$. Además, $\emptyset, K \in \mathcal{F}$.

Dada una filtración de complejos simpliciales, la **homología simplicial** permite estudiar cómo evolucionan sus características topológicas al variar el parámetro de filtración. En particular, los grupos de homología $H_k(K_t; \mathbb{F})$ describen componentes conexas, ciclos, cavidades y estructuras de dimensión superior presentes en cada complejo K_t. La **homología persistente** [2] compara estos grupos a lo largo de la filtración y resume la información mediante un código de barras, cuyos intervalos representan el nacimiento y la muerte de clases homológicas al aumentar el parámetro t.

Definición 3. Sea X un conjunto finito. Una **medida de capacidad** [5] sobre $(X, \mathcal{P}(X))$ es una aplicación $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, 1]$ que cumple (1) Condiciones de borde: $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(X) = 1$; (2) Monotonía: si $A \subseteq B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Las medidas de capacidad pueden representarse mediante la transformada de Möbius [4], obteniéndose una descomposición en coeficientes.

3 De medidas de capacidad a complejos simpliciales

El siguiente resultado, cuya demostración es directa, permite obtener una filtración de complejos simpliciales a partir de una medida de capacidad.

Teorema 1. *Sea el conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y sea μ una capacidad. Para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos $K_t^\mu = \{\emptyset\} \cup \{\sigma \subseteq X : \sigma \neq \emptyset \text{ y } \mu(\sigma) \leq t\}$. Entonces la familia $\mathcal{K}^\mu = \{K_t^\mu\}_{t \in \mathbb{R}}$ es una filtración creciente de complejos simpliciales abstractos. Es decir: (1) Para todo $t \in \mathbb{R}$, K_t^μ es un complejo simplicial abstracto. (2) Si $s \leq t$, entonces $K_s^\mu \subseteq K_t^\mu$.*

Por tanto, a partir del Teorema 1, toda medida de capacidad μ definida sobre un conjunto finito X induce una filtración de complejos simpliciales y, en consecuencia, un código de barras asociado a μ. Dicho código de barras describe la evolución de la estructura topológica de los complejos K_t^μ a medida que aumenta el parámetro de escala t.

Observación 1 (Tiempo de nacimiento de un símplice). El valor $\mu(\sigma)$ puede interpretarse como el valor de filtración, o tiempo de nacimiento, del símplice σ, i.e., $\text{birth}(\sigma) = \mu(\sigma)$. La monotonía de μ implica que si $\tau \subseteq \sigma$, entonces $\mu(\tau) \leq \mu(\sigma)$. Por tanto, toda cara τ de un símplice σ aparece no más tarde que σ. Esta es precisamente la condición de compatibilidad necesaria para obtener un complejo simplicial filtrado válido.

Ejemplo 1 (Capacidad aditiva uniforme). Sea $X = \{a, b, c\}$ y definamos $\mu_{\text{unif}}(S) = \frac{|S|}{3}$. Nótese que μ_{unif} es una capacidad aditiva, sin interacciones por pares ni de orden superior.

La filtración inducida por μ_{unif} es $K_t^{\mu_{\text{unif}}} = \left\{ S \subseteq X : \frac{|S|}{3} \leq t \right\}$. Los valores críticos son 1/3, 2/3 y 1. Concretamente, $K_t^{\mu_{\text{unif}}} = \{\emptyset\}$ si $0 \leq t < \frac{1}{3}$; $K_t^{\mu_{\text{unif}}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ si $\frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3}$; $K_t^{\mu_{\text{unif}}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ si $\frac{2}{3} \leq t < 1$; $K_1^{\mu_{\text{unif}}} = \mathcal{P}(X)$.

Para $\frac{2}{3} \leq t < 1$, el complejo es la frontera de un triángulo. En ese intervalo aparece una clase de homología en dimensión 1, que muere cuando aparece el 2-simplex $\{a, b, c\}$ en $t = 1$. En homología ordinaria, los códigos de barra son $\mathcal{B}_0 = \left\{ \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^{\times 2}, \left[\frac{1}{3}, \infty\right) \right\}$, $\mathcal{B}_1 = \left\{ \left[\frac{2}{3}, 1\right) \right\}$, donde el exponente es la multiplicidad del intervalo (ver Figura 1). Se ilustra así que, en el caso uniforme, la filtración depende únicamente del cardinal de los subconjuntos.

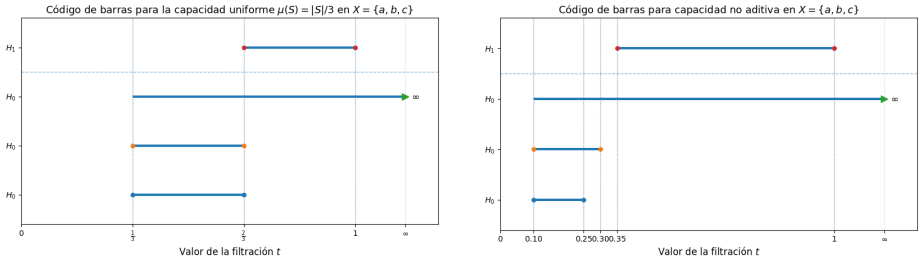
Ejemplo 2 (Capacidad no aditiva). Sea $X = \{a, b, c\}$. Se define la capacidad μ mediante sus coeficientes de Möbius: $m_\mu(\{a\}) = m_\mu(\{b\}) = m_\mu(\{c\}) = 0.10$; $m_\mu(\{a, b\}) = 0.05$; $m_\mu(\{a, c\}) = 0.15$, $m_\mu(\{b, c\}) = 0.10$; $m_\mu(\{a, b, c\}) = 0.40$. Además, tomamos $m_\mu(\emptyset) = 0$. La suma total de todos los coeficientes es 1. Como todos los coeficientes son no negativos, la función $\mu(S) = \sum_{A \subseteq S} m_\mu(A)$ es monótona. Por tanto, μ es una capacidad.

Los valores de nacimiento de los símplices son: $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = \mu(\{c\}) = 0.10$; $\mu(\{a, b\}) = 0.25$, $\mu(\{b, c\}) = 0.30$, $\mu(\{a, c\}) = 0.35$, $\mu(\{a, b, c\}) = 1$.

En este ejemplo, los tres vértices nacen simultáneamente en $t = 0.10$. La arista $\{a, b\}$ aparece en $t = 0.25$ y une dos componentes conexas, por lo que una clase de H_0 muere en ese instante. Después, la arista $\{b, c\}$ aparece en $t = 0.30$ y conecta la tercera componente con las anteriores, de modo que otra clase de H_0 muere en $t = 0.30$. La componente conexa restante persiste. Por tanto, $\mathcal{B}_0 = \{[0.10, 0.25), [0.10, 0.30), [0.10, \infty)\}$.

Finalmente, cuando aparece la arista $\{a, c\}$ en $t = 0.35$, se forma el ciclo $a - b - c - a$, que genera una clase de homología en dimensión 1. Esta clase muere en $t = 1$, cuando aparece el 2-símplice $\{a, b, c\}$ y rellena el ciclo. Por tanto, $\mathcal{B}_1 = \{[0.35, 1)\}$. Así, la no aditividad retrasa la aparición del triángulo completo y produce una clase en dimensión 1 que persiste en el intervalo $[0.35, 1)$.

Este ejemplo muestra el papel de los coeficientes de Möbius. El coeficiente ternario $m_\mu(\{a, b, c\}) = 0.40$ no afecta al nacimiento de las aristas, pero sí retrasa la aparición del triángulo completo. Por tanto, la no aditividad de la capacidad introduce información de interacción de orden superior en la filtración.



(a) Capacidad uniforme. **(b)** Capacidad no aditiva.

Fig. 1: Comparación entre los códigos de barras obtenidos a partir de una capacidad aditiva uniforme y una capacidad no aditiva sobre $X = \{a, b, c\}$.

4 Conclusiones y trabajo en curso

Se ha descrito un procedimiento para asociar una filtración de complejos simpliciales a una medida de capacidad μ. La monotonía de μ resulta esencial en este proceso para garantizar que las caras aparecen antes que sus cofaces. Se hace posible así aplicar herramientas de análisis topológico de datos al estudio de medidas de capacidad: los códigos de barras obtenidos proporcionan una descripción topológica de la estructura de interacción codificada por la medida. La transformada de Möbius añade una interpretación algebraica: permite descomponer el nacimiento de cada simplex en contribuciones individuales, binarias y de orden superior.

Como trabajo en curso, se están se están analizando familias particulares de capacidades, como las 2-aditivas y capacidades definidas a partir de distribuciones de probabilidad. También se está investigando la relación con integrales de Choquet, con el objetivo de incorporar señales o pesos adicionales sobre los vértices. Se está desarrollando una implementación computacional para construir estas filtraciones y comparar sus códigos de barras en ejemplos concretos.

Referencias

1. Edelsbrunner, H., Harer, J.: Computational topology: an introduction. American Mathematical Society (2010)
2. Otter, N., Porter, M.A., Tillmann, U., Grindrod, P., Harrington, H.A.: A roadmap for the computation of persistent homology. EPJ data science **6**(1), 17 (2017)
3. Oudot, S.Y.: Persistence theory: from quiver representations to data analysis, vol. 209. American Mathematical Society Providence (2015)
4. Rota, G.C.: On the foundations of combinatorial theory: I. Theory of Möbius functions. In: Classic Papers in Combinatorics, pp. 332–360. Springer (1964)
5. Sugeno, M.: Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications. Ph.D. thesis, Tokyo Institute of Technology (1974)
6. Virk, Ž.: Introduction to Persistent Homology. Založba UL FRI (2022)

Pre-procesamiento de imágenes con suavizados discretos truncados

Pablo Flores-Vidal[1,2][0000-0002-3936-1159], Daniel Gómez[1,2][0000-0001-9548-5781], and Luis Magdalena[3][0000-0003-3673-421X]

[1] Facultad de Estudios Estadísticos, Avda. Puerta de Hierro s/n, Ciudad Universitaria, 28040 Madrid
[2] Instituto Universitario de Estadística y Ciencia de Datos, Facultad de Estudios Estadísticos, Avda. Puerta de Hierro s/n, Ciudad Universitaria, 28040 Madrid
[3] ETSI Informáticos, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, Spain
pflores@ucm.es, dagomez@estad.ucm.es, luis.magdalena@upm.es

Abstract. Este artículo resume los resultados publicados en [1], donde se introduce un marco novedoso para definir operadores de suavizado diseñados intrínsecamente para espacios discretos. Además de presentarse de manera formal las posibles definiciones de operadores clásicos conocidos como Media, Gaussiano, Bilateral, etc, definidos formalmente de manera continua en espacios discretos, este nuevo abordaje permite la definición de suavizados que no son planteables en el marco continuo. En particular, se presenta la 'Media Discreta K-truncada' (que tiene como caso particular la Media Discreta) que no tiene fórmula explícita en el continuo, ni es planteable como problema clásico de optimización. La propuesta se compara evaluando los resultados de detección de bordes en el conjunto de imágenes de segmentación de Berkeley completo (BSDS500), comparando el rendimiento de varios métodos de suavizado con sus respectivos datos de referencia. Además, para evaluar la robustez, los métodos se probaron en una versión ruidosa del conjunto de datos, corrompida con ruido de sal y pimienta. Finalmente, las ventajas en la calidad de detección de bordes resaltan la superioridad de los operadores discretos propuestos sobre las técnicas de suavizado convencionales.

Keywords: Filtros de suavizado · Media discreta · Media discreta k-truncada

1 Motivación

En el análisis de imágenes digitales, el paso de procesamiento inicial es fundamental para garantizar que los algoritmos subsiguientes funcionen correctamente [4,5]. Las técnicas de suavizado destacan como métodos cruciales en este punto [7,8], cuyo objetivo principal es reducir el ruido manteniendo la consistencia espacial dentro de una imagen, a la vez que se preservan detalles estructurales vitales. De manera similar a cómo la calidad de los datos impacta directamente en la precisión del modelo en el análisis de datos convencional, el suavizado es

fundamental en el pre-procesamiento de imágenes para asegurar el éxito de las fases posteriores, como la detección de bordes, la segmentación de imágenes, el reconocimiento de objetos, la clasificación de imágenes, etc.

En este estudio, presentamos un nuevo filtro de suavizado discreto que utiliza optimización con distancia euclidiana $L2^2$ denominada «Media discreta K-truncada», que se basa en minimizar la suma de las distancias dentro de un vecindario de píxeles local. Esta nueva medida se basa en la Media discreta ya presentada en [2,3].

Definición 1. *Sea* $N_k(i,j) = \{x_1, \ldots, x_{|N_k(i,j)|}\}$ *el entorno de radio* k *para el píxel* (i,j)*. La función de la* ***Media Discreta*** $\mathcal{T}^{|N_k(i,j)|} \to \{0, \ldots, 255\}$ *se define como:*

$$DMean(x_1, \ldots, x_{|N_k(i,j)|}) = \arg\min_{a \in \mathcal{T}} \sum_{i=1}^{|N_k(i,j)|} (x_i - a)^2$$

Los diferentes métodos de suavizado se aplican a imágenes en escala de grises, tanto en su versión original como en una versión contaminada con ruido de tipo sal y pimienta. Posteriormente, los mapas de bordes resultantes de aplicar el operador de Sobel sobre las imágenes suavizadas se evalúan utilizando el conocido conjunto de Berkeley para segmentación de imágenes (BSDS500 [6]).

2 Una nueva familia de suavizados discretos K-truncados

Mientras que la mediana y media discretas ya presentadas en [1] adaptan exitosamente a sus contrapartidas clásicas continuas, se pueden percibir como traslaciones directas de sus funciones homónimas continuas. Para aprovechar todo el potencial de las propiedades matemáticas de los retículos acotados discretos, proponemos una nueva familia de operadores que surgen de los problemas de optimización que son directamente inabordables (o carecen de una solución cerrada) trabajando directamente en espacios continuos.

En dominios continuos, encontrar una solución analítica exacta para problemas de optimización que involucran no linealidades absolutas o penalizaciones acotadas robustas es una tarea difícil. Un ejemplo clásico es el problema de Fermat-Weber para la mediana continua en dimensiones superiores, que no tiene una fórmula exacta explícita y se basa en aproximaciones numéricas iterativas. Sin embargo, al imponer las restricciones estructurales de un espacio discreto acotado $\mathcal{T}$ (como el espacio de escala de grises donde $\mathcal{T} = \{0, \ldots, 255\}$), estos problemas aparentemente intratables pueden resolverse de manera trivial y óptima mediante una evaluación exhaustiva.

Aprovechando esta optimización discreta, introducimos la versión truncada de nuestro operador media discreta. Al incorporar un parámetro de truncamiento K, limitamos la penalización máxima que puede introducir un valor atípico, lo que proporciona una robustez excepcional frente al ruido, una característica que va más allá de las generalizaciones directas de la teoría de pre-agregaciones continua.

Definición 2. *Bajo las mismas condiciones, dado un umbral de truncamiento $K > 0$, el operador* ***Media Discreta K-truncada*** *con $\mathcal{T}^{|N_k(i,j)|} \to \mathcal{T}$ se establece como:*

$$DMean^K(x_1, \ldots, x_{|N_k(i,j)|}) = \arg\min_{a \in \mathcal{T}} \sum_{i=1}^{|N_k(i,j)|} \min\{(x_i - a)^2, K^2\}$$

Al igual que con la media discreta estándar, si el proceso de minimización en cualquiera de los operadores truncados produce un conjunto de múltiples valores óptimos, aplicamos la convención de seleccionar el ínfimo del conjunto de mínimos. Cabe destacar que el parámetro de truncamiento K controla la robustez del operador. Cuando K es suficientemente grande (por ejemplo, $K \geq \max(\mathcal{T})$), la función truncada converge naturalmente en la media discreta estándar ya definida en [2].

La transición de operadores discretos clásicos a truncados introduce un cambio fundamental en el panorama de la optimización. En el caso continuo, las funciones objetivo, como la norma $L2$, son estrictamente convexas, lo que garantiza un único mínimo global fácilmente alcanzable mediante métodos basados en gradientes. Sin embargo, la introducción del parámetro de truncamiento K rompe esta convexidad, creando una superficie de coste caracterizada por múltiples mínimos locales y mesetas (donde el gradiente se anula). En un dominio continuo, estas funciones son notoriamente difíciles de optimizar, ya que los algoritmos de búsqueda local suelen quedar atrapados en soluciones subóptimas. Por el contrario, en el dominio discreto $\mathcal{T}$, la naturaleza finita del espacio de búsqueda permite obviar el requisito de convexidad. Al realizar una evaluación exhaustiva sobre el conjunto limitado de posibles valores de intensidad, se garantiza la identificación del verdadero óptimo global, transformando así un problema continuo computacionalmente complejo en una tarea discreta trivial y exacta.

Para una mejor comprensión, proponemos una clasificación de varias funciones de suavizado que se muestran en la Tabla 1.

Table 1. Resumen de las funciones de suavizado para imágenes en escala de grises evaluadas en este estudio.

Suavizado	**Distancia/Ponderación**	**Dominio**
Media clásica	$d(x,a) = L_2^2(x-a) = (x-a)^2$	Continuo (requiere truncamiento)
Gaussiano	L_2 (spatial)	Continuo (requiere truncamiento)
Mediana clásica	$d^{L_1} = \lvert x-a \rvert$	Discreto / Continuo
Bilateral	Spatial and Range (color)	Continuo (requiere truncamiento)
Media recortada	Ordered Statistics	Continuo (requiere truncamiento)
$DMean^K$	$d^{L_2} = \min\{(x-a)^2, K^2\}$	Discreto

3 Experimento, resultados parciales y conclusiones

Para evaluar la calidad de los suavizados, aplicamos el operador de Sobel a 500 imágenes del BSDS500 [6]. Su robustez se evaluó bajo dos condiciones: imágenes originales y corrompidas con un 5% de ruido sal y pimienta. Además, se incluyó una versión sin suavizar como comparación de referencia. El operador Sobel se aplicó a las imágenes suavizadas por cada uno de los filtros: la media clásica, $DMean^K$, bilateral, Gaussiano y la versión sin suavizar. Más allá de su relevancia teórica, estos operadores discretos y truncados ofrecen resultados excepcionales. Nuestras evaluaciones demuestran que estos enfoques superan a las técnicas tradicionales. En concreto, la Media discreta K-truncada para K=90 ($DMean^{90}$) obtuvo la mejor clasificación general en comparaciones entre pares de métodos. El enfoque presentado ofrece una formulación unificada y consistente para diversos métodos de suavizado, y los hallazgos no se limitan a sus aplicaciones específicas en tareas de procesamiento de imágenes de bajo nivel, como el suavizado. Una prometedora línea de investigación sería extender estos métodos a niveles superiores de procesamiento de imágenes, en particular al preprocesamiento de imágenes para el entrenamiento con *deep learning* (CNN).

Acknowledgments. Esta investigación ha sido financiada por el Gobierno de España (ayudas de los proyectos PID2021-122905NB-C21, PID2021-122905NB-C22, PID2023-146540OB-C42 y PID2024-155289NB-I00 financiado por el MICIU /AEI /10.13039/501100011033 / FEDER, EU).

Bibliografía

1. Flores, P., Gomez, D., Magdalena, L.: Pre-aggregation functions in the discrete domain and its applications to image processing. Available at SSRN 6441703 (2026). https://doi.org/10.2139/ssrn.6441703
2. Flores-Vidal, P.: Pre-aggregation functions in the discrete domain and its applications to image processing (source code) (2026), zenodo repository, DOI: 10.5281/zenodo.18493971
3. Flores-Vidal, P., Gómez, D., Magdalena, L.: A discrete Median filter for RGB images. In: Cornejo, M.E., Jiménez Linares, L., Medina, J., Moreno García, J., Ojeda-Aciego, M. (eds.) Libro de Abstracts del XXIII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF 2025). pp. 34–35. Universidad de Cádiz (Dept. Matemáticas), Cádiz, España (2025), https://estylf2025.uca.es/wp-content/uploads/2025/09/BoA_ESTYLF2025.pdf
4. González, R.C., Woods, R.E.: Digital Image Processing, 3rd edition. Pearson (2008)
5. Jain, A.K.: Fundamentals of digital image processing. Prentice-Hall, Inc. (1989)
6. Martin, D., Fowlkes, C., Tal, D., Malik, J.: A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics. In: Proceedings of IEEE International Conf. on Computer Vision. pp. 416–423 (2001)
7. Sobel, I.: History and definition of the so-called "sobel operator", more appropriately named the sobel–feldman operator (2014), technical note
8. Tomasi, C., Manduchi, R.: Bilateral filtering for gray and color images. In: Sixth international conference on computer vision (IEEE Cat. No. 98CH36271). pp. 839–846. IEEE (1998)

Prior Espacial-Temporal Difuso (PETD) para la corrección del Seguimiento Articular en Natación

David Muñoz Valero[1][0000−0002−2509−9911], Juan Moreno Garcia[1][0000−0003−2430−145X], Eusebio Angulo[2][0000−0001−6731−3229], and Alejandro Lopez Hernandez[3][0009−0006−2890−5292]

[1] Escuela de Ingeniería Industrial y Aeroespacial de Toledo (UCLM) david.munoz@uclm.es,juan.moreno@uclm.es
[2] Escuela Superior de Informática de Ciudad Real (UCLM) eusebio.angulo@uclm.es
[3] Facultad de Ciencias del Deporte de Toledo (UCLM) alejandro.lopez@uclm.es

Resumen La estimación de pose en entornos acuáticos sufre de inestabilidad temporal debida a oclusiones, turbulencia y fluctuaciones lumínicas. Para tratar esto, en este trabajo en progreso se propone un prior espacio-temporal difuso interpretable, que genera para cada punto y cada instante información sobre dónde es probable que se ubiquen las marcas en el siguiente *frame* mediante un conjunto difuso. Esto se consigue mediante un método difuso que utiliza la trayectoria reciente y la estimación actual de la marca.

Keywords: estimación de pose · representación espacio-temporal difusa · natación.

1. Introducción

El análisis de pose en natación ha ganado notable impulso gracias a los avances en estimación de pose humana. No obstante, el entorno acuático introduce perturbaciones específicas, como salpicaduras y oclusiones, que degradan la estabilidad de las marcas (*keypoints*) detectados fotograma a fotograma que compromete el cálculo posterior, generando una incertidumbre sobre las posiciones de las marcas. Para atenuar el ruido se han propuesto múltiples filtros temporales: el filtro de Kalman [1], el adaptativo One-Euro [2], el suavizador de Whittaker-Eilers [3] y la Regresión por Procesos Gaussianos (GPR) [4]. Aunque todos reducen fluctuaciones de alta frecuencia, presentan una limitación compartida: ninguno construye de manera explícita un *prior espacial*, entendido como dónde es probable que aparezca el *keypoint* (marcas o puntos articulares del nadador) en el siguiente fotograma. En este trabajo en progreso se propone un prior espacio-temporal difuso interpretable, que genera para cada punto y cada instante información sobre dónde es probable que se ubiquen las marcas en el siguiente *frame* mediante un conjunto difuso. Esto se consigue mediante un método difuso que utiliza la trayectoria reciente y la estimación actual de la marca.

2. Propuesta inicial

La propuesta se fundamenta en tres pilares: una representación difusa de la trayectoria en una ventana temporal de k fotogramas, operadores espaciales difusos basados en *Region Connection Calculus* difusos (Fuzzy RCC-8) para evaluar la coherencia entre *keypoints*, y operadores temporales difusos inspirados en lógica temporal para detectar eventos destacados en la secuencia. El procesamiento de cada keypoint sigue un ciclo de tres pasos:

Paso 1. Construcción de una representación difusa de las k posiciones vecinas de la marca generando el conjunto de trayectoria $\mathcal{T}_{i,t}$: En lugar de considerar únicamente el fotograma inmediatamente anterior, se define una ventana deslizante de tamaño k centrada en el instante t. Para cada keypoint i, las posiciones de los k fotogramas anteriores y posteriores se representan como un conjunto difuso de trayectoria $\mathcal{T}_{i,t}$. Este conjunto captura la noción de dónde se ha estado y hacia dónde se dirige de forma gradual, sin asumir una dinámica lineal rígida. La ventana permite que el sistema tolere breves oclusiones o saltos de detección, ya que la información de los fotogramas vecinos actúa como contexto. Esta ventana puede ayudar a predecir dónde deberían encontrarse *keypoints* ocluidos.

Paso 2. Uso de operadores espaciales difusos entre los *keypoints* relacionados anatómicamente, produciendo restricciones en el espacio (Sección **??**):

Region Connection Calculus (RCC-8) proporciona un conjunto de relaciones topológicas entre regiones [5]. En su versión difusa, cada *keypoint* se modela como una región difusa en el espacio de la imagen. Inicialmente se consideran tres relaciones fundamentales:

- **DC** (*Disconnected*): grado en que dos regiones difusas están separadas. Permite detectar si dos *keypoints* anatómicamente próximos (por ejemplo, codo y muñeca) han divergido anormalmente.
- **EC** (*Externally Connected*): grado en que dos regiones se tocan en el borde sin solaparse. Es útil para evaluar la continuidad de la cadena cinemática sin forzar superposiciones.
- **PO** (*Partially Overlapping*): grado de solapamiento entre dos regiones difusas. Detecta situaciones de oclusión parcial donde dos *keypoints* se confunden en la imagen.

Para cada par de *keypoints* anatómicamente conectados (i, j) —por ejemplo, codo y muñeca—, se evalúan las relaciones RCC-8 difusas sobre sus regiones espaciales asociadas. Los grados μ_{DC}, μ_{EC} y μ_{PO} capturan el grado de coherencia topológica entre ambas marcas, actuando como restricciones esqueléticas que complementan el prior temporal. A continuación se mostrará un ejemplo considerando que la distancia entre dos puntos es la métrica euclídea. Sean las posiciones de referencia para el codo y muñeca izquierda en el *frame* t:

- Codo: $z_{\text{codo}} = (100, 200)$ píxeles (se denotará por px.)
- Muñeca: $z_{\text{muñeca}} = (130, 200)$ px.
- Distancia anatómica: $d_t = 30$ px (se asume que es la distancia correcta).

Y sean las siguientes medidas del detector en el *frame* $t+1$:

- Codo detectado: $z'_{\text{codo}} = (102, 205)$ (ligero movimiento, coherente)
- Muñeca detectada: $z'_{\text{muñeca}} = (180, 210)$ (salto brusco de 50 px)
- Distancia anatómica: $d_{t+1} \approx 78$ px.

Basándose en lo anterior, el problema se puede modelar de forma difusa de la siguiente manera. Se persigue que las regiones estén algo conectadas (DC muy bajo), la conexión externa de las fronteras sea alta (EC alto) y el solapamiento sea bajo (PO muy bajo). Para ello se modela cada marca como una región difusa de radio $\sigma = 16$ px, lo que provoca que se toquen levemente considerando la distancia anatómica correcta entre puntos.

En el *frame* $t+1$ se tiene que $78 \gg 32$, por lo que las regiones no se solapan; por tanto se tiene:

- $\mu_{\text{DC}} = 1$ (grado de desconexión total porque no hay solapamiento)
- $\mu_{\text{EC}} = 0$ (no se tocan las regiones difusas)
- $\mu_{\text{PO}} = 0$ (sin solapamiento)

Paso 3. Se aplican los operadores temporales difusos (F, G, U) sobre la secuencia de conjuntos difusos, detectando eventos destacados que modulan la confianza de la estimación final. La salida del ciclo es una posición corregida que integra la coherencia esquelética y la evidencia temporal: Inspirados en los operadores de lógica temporal [6], se definen tres operadores difusos sobre la ventana de k fotogramas:

- **Finally / Eventually (F)**: mide el grado con el que una propiedad (por ejemplo, "el keypoint está en reposo") se cumple en algún momento de la ventana. Permite detectar eventos transitorios como el inicio de una brazada.
- **Globally (G)**: mide el grado con el que una propiedad se mantiene durante toda la ventana. Es útil para identificar segmentos de trayectoria estables que merecen mayor confianza.
- **Until (U)**: mide el grado con el que una propiedad se sostiene hasta que otra ocurre. Permite modelar transiciones como "el keypoint se mantiene cerca de la línea de agua hasta que emerge".

Estos operadores se evalúan sobre la secuencia de conjuntos difusos $\mathcal{T}_{i,t}$ produciendo un conjunto de eventos destacados $\mathcal{E}_{i,t}$ que caracterizan la evolución temporal de cada keypoint.

A modo de ejemplo, considérese la detección del evento de inicio de tracción en la brazada de crol. El operador U (Until) evalúa sobre la ventana de k fotogramas el grado con el que la muñeca se ha mantenido en la zona de entrada hasta iniciar la tracción. Si la marca permanece en la zona de entrada durante varios *frames* consecutivos y posteriormente desciende con velocidad creciente, el valor de activación será alto, señalando con firmeza la transición al evento. Este evento detectado modula la confianza del prior espacial para los fotogramas posteriores, confirmando que la trayectoria observada sigue el patrón biomecánico esperado de la brazada. Este tipo de funcionamiento de descubrimiento de eventos puede generalizarse para detectar otros instantes destacados que los expertos en natación identifiquen como relevantes.

3. Conclusiones

En este trabajo en progreso se ha articulado una propuesta de prior espacio-temporal difuso para la corrección de marcas articulares en el seguimiento articular de la natación. Se están utilizado tres conceptos claves para conseguir la corrección, una representación difusa de la trayectoria mediante ventanas de k fotogramas, operadores espaciales RCC-8 difusos para evaluar la coherencia esquelética (entre otras cosas), y operadores temporales difusos inspirados en lógica temporal para detectar eventos destacados en la secuencia. La combinación de estos elementos puede permitir generar un prior espacial interpretable que anticipa dónde esperar una marca en el siguiente fotograma, fusionando esa expectativa con la nueva medición de forma gradual.

Acknowledgments

Este trabajo ha sido financiado por la ayuda SBPLY/24/180225/00003, concedida por la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha. Los autores quieren agradecer al departamento de Tecnologías y Sistemas de Información (TSI) de la Universidad de Castilla la Mancha (UCLM) y al proyecto ATENEA: Aprendizaje Profundo, Metaheurísticas y Conocimiento Experto para Sistemas Multiagente en Entornos Ferroviarios Liberalizados Parcialmente Observables (Referencia 2025-GRIN-38352), cofinanciado por el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER), la financiación necesaria para la difusión de este trabajo.

Referencias

1. Welch, G., Bishop, G.: An introduction to the Kalman filter. Technical Report TR 95-041, Univ. of North Carolina at Chapel Hill (1995)
2. Casiez, G., Roussel, N., Vogel, D.: The One-Euro filter: A simple speed-based low-pass filter for noisy input in interactive systems. In: Proc. CHI, pp. 2527–2530. ACM (2012)
3. Eilers, P.H.C.: A perfect smoother. Anal. Chem. **75**(14), 3631–3636 (2003)
4. Rasmussen, C.E., Williams, C.K.I.: Gaussian Processes for Machine Learning. MIT Press (2006)
5. Schockaert, S., De Cock, M., Cornelis, C, Kerre, E.E.: Fuzzy region connection calculus: Representing vague topological information. International Journal of Approximate Reasoning, Vol. 48, 1, pag. 314-331, 2008
6. Frigeri, A., Pasquale, L., Spoletini, P.: Fuzzy Time in Linear Temporal Logic. ACM Transactions on Computational Logic, Vol. 15 (2014)

Implicaciones difusas a través de suma ordinal de operadores

Roberto G. Aragón[1], Celia Cordovilla[1,2], Pascual Jara[2], and Jesús Medina[1]

[1] Departmento de Matemáticas. Universidad de Cádiz. España*
{roberto.aragon,jesus.medina}@uca.es
[2] Departmento de Álgebra. Universidad de Granada. España
{ccordovilla,pjara}@ugr.es

Resumen Este trabajo introduce una nueva construcción de suma ordinal para familias de aplicaciones definidas sobre conjuntos parcialmente ordenados, inspirada en la suma de Clifford. En este sentido, se ha evidenciado que, en el ámbito de los sistemas distribuidos y computación en el borde, surge la imperante necesidad de incorporar información local. En consecuencia, la presente investigación se enfoca en analizar las condiciones necesarias y suficientes para garantizar que la suma de los operadores en cuestión resulte en una implicación difusa. Para ello, se examina la preservación de propiedades fundamentales como la monotonía, las condiciones de frontera, la propiedad de intercambio, entre otras.

Keywords: ordinal sum, lattice sum, general operators, fuzzy implications

La computación en el borde (*edge computing*) y los sistemas distribuidos constituyen ejemplos importantes de entornos en los que la información global de un sistema debe obtenerse a partir del procesamiento y la interacción de componentes locales. En este tipo de escenarios, cada subsistema dispone de información parcial, por lo que resulta necesario desarrollar metodologías que permitan combinar los resultados obtenidos localmente. Esta necesidad motiva el análisis exhaustivo tanto de las estructuras algebraicas que pueden surgir de las diversas estructuras locales, así como de nuevas herramientas matemáticas capaces de modelar adecuadamente dicha agregación local junto con las diferentes metodologías para su integración en el sistema global.

Desde una perspectiva algebraica, esto requiere analizar las estructuras que pueden surgir a partir de la combinación de distintas estructuras locales, así como mecanismos que permitan integrarlas en un único sistema. En este contexto, los autores de [7] introdujeron una generalización de la conocida suma ordinal de Clifford para conjuntos parcialmente ordenados y retículos, denominada *suma de*

* Parcialmente financiado por el proyecto PID2022-137620NB-I00 con el apoyo de MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y FEDER, UE, proyecto FEDER-UCA-2024-A2-04 con el apoyo de Programa Operativo FEDER Andalucía 2021-2027 y de Consejería de Universidad, Investigación e Innovación, Junta de Andalucía.

conjuntos parcialmente ordenados basada en retículos. La principal novedad de esta construcción radica en que el conjunto de índices deja de estar restringido a una cadena (conjunto totalmente ordenado) y pasa a ser un retículo arbitrario. Esta extensión amplía considerablemente la flexibilidad de la construcción original y permite modelar situaciones en las que las relaciones entre las distintas estructuras locales presentan una organización más compleja que un orden lineal.

Una vez establecida una metodología para combinar estructuras ordenadas, surge de manera natural la cuestión de cómo agregar operadores definidos sobre dichas estructuras. Más concretamente, resulta de interés determinar qué propiedades de los operadores locales se preservan al pasar a la estructura global obtenida mediante los distintos mecanismos de agregación. En este sentido, las normas triangulares (t-normas) han desempeñado tradicionalmente un papel fundamental debido a sus excelentes propiedades algebraicas y a su estrecha relación con la lógica difusa. Sin embargo, aunque las t-normas se definieron inicialmente sobre intervalos acotados, otras lógicas, como por ejemplo la multivaluada se desarrolla sobre retículos acotados que no son necesariamente conjuntos totalmente ordenados. Esta circunstancia ha motivado el estudio de extensiones de las t-normas a estructuras ordenadas más generales, como los trabajos presentados en [5,9,12,14]. Posteriormente, en [6], se introdujo un mecanismo que permite generalizar la suma ordinal de t-normas al marco de las sumas ordinales basadas en retículos, proporcionando así una herramienta para construir operadores globales a partir de familias de operadores locales.

No obstante, en muchas aplicaciones prácticas las hipótesis tradicionales asociadas a las t-normas, tales como la asociatividad o la conmutatividad, pueden resultar restrictivas. En consecuencia, ha surgido un creciente interés por considerar tipos de operadores que relajen algunas de estas condiciones permitiendo modelar interacciones del contexto de forma más precisa y sensible. En esta dirección, diversos autores han estudiado sumas ordinales de operadores monótonos más generales, como las uninormas y las pseudonormas, obteniendo resultados relevantes [8,11]. En un entorno más general en [1] se abordó el estudio de sumas ordinales de operadores arbitrarios definidos sobre una familia de retículos y construidas a partir de la suma basada en retículos introducida en [7]. Dicho trabajo extiende los resultados obtenidos en [6] y proporciona una construcción general que permite generar operadores sobre la estructura agregada a partir de operadores definidos localmente. Asimismo, se analizó qué propiedades algebraicas son preservadas por esta nueva construcción y bajo qué condiciones pueden garantizarse.

Por otra parte, las implicaciones difusas constituyen una de las operaciones fundamentales de la lógica difusa, desempeñando un papel esencial en el razonamiento aproximado, así como en diversos mecanismos de inferencia deductiva e inductiva. Su importancia se refleja también en la gran variedad de aplicaciones en las que intervienen, entre las que destacan la resolución de ecuaciones difusas, la morfología matemática difusa, las medidas difusas, el procesamiento de imágenes y otros ámbitos relacionados con la representación y el tratamien-

to de información imprecisa. Tradicionalmente, las implicaciones difusas se han definido como aplicaciones $I\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que satisfacen determinadas condiciones de monotonía y frontera, prestándose especial atención a las implicaciones residuadas derivadas de t-normas continuas por la izquierda. Sin embargo, este marco clásico se encuentra restringido al intervalo unidad [3], lo que puede limitar su capacidad para modelar contextos más generales basados en estructuras ordenadas arbitrarias.

En este trabajo nos centramos precisamente en dicho contexto general, considerando operadores definidos sobre conjuntos parcialmente ordenados. Mediante la agregación de estructuras a través de mecanismos de suma ordinal basada en retículos [1,6,9], nuestro objetivo principal consiste en analizar si existen condiciones necesarias y/o suficientes que garanticen que la suma ordinal de operadores sea una implicación difusa. Además de analizar diferentes propiedades tales como monotonía en ambos argumentos, condiciones de frontera, propiedad de la identidad, del orden o de intercambio entre otras, se preservan de los operadores locales en dicha suma ordinal. Para ello, introducimos una nueva construcción de suma ordinal para familias de aplicaciones definidas sobre conjuntos parcialmente ordenados inspirada en la suma ordinal de Clifford, extendiendo la propuesta recientemente presentada en [15].

Finalmente, este trabajo abre diversas líneas de investigación futuras. Entre ellas, destaca el estudio de nuevas definiciones de sumas generales de operadores que permitan obtener una suma que sí cumpla todas las condiciones de frontera que satisface una implicación difusa. Asimismo, se investigarán condiciones suficientes para establecer que dicha suma de operadores sea la implicación residuada correspondiente a una suma ordinal de operadores continuos a izquierda, ampliando así los resultados clásicos presentados en [2,4,13]. Por último, se explorarán posibles aplicaciones de estos resultados en distintas herramientas matemáticas basadas en estructuras ordenadas, como el análisis de conceptos formales difusos en el paradigma multiadjunto [10].

Referencias

1. R. G. Aragón, P. Jara, and J. Medina. General and left-continuous operators on lattice-based sums. *Fuzzy Sets and Systems*, 528:109706, 2026.
2. M. Baczyński. Residual implications revisited. notes on the smets–magrez theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 145(2):267–277, 2004.
3. M. Baczyński and B. Jayaram. Fuzzy implications from fuzzy logic operations. In *Fuzzy Implications*, pages 39–107. Springer, 2008.
4. M. Carbonell and J. Torrens. Continuous r-implications generated from representable aggregation functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 161(17):2276–2289, 2010.
5. A. Dvořák, M. Holčapek, and J. Paseka. On ordinal sums of partially ordered monoids: A unified approach to ordinal sum constructions of t-norms, t-conorms and uninorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 446:4–25, 2022. New Trends in Aggregation.
6. M. El-Zekey. Lattice-based sum of t-norms on bounded lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 386:60–76, 2020.
7. M. El-Zekey, J. Medina, and R. Mesiar. Lattice-based sums. *Information Sciences*, 223:270–284, 2013.

8. J. Kalafut and A. Mesiarová-Zemánková. Decomposition of pseudo-uninorms with continuous underlying functions via ordinal sum. *Information Sciences*, 690:121573, 2025.
9. J. Medina. Characterizing when an ordinal sum of t-norms is a t-norm on bounded lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 202:75–88, 2012.
10. J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and J. Ruiz-Calviño. Formal concept analysis via multi-adjoint concept lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(2):130–144, 2009.
11. A. Mesiarová-Zemánková. Ordinal sums of representable uninorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 308:42–53, 2017. Theme: Aggregation Operations.
12. Y. Ouyang, H.-P. Zhang, and B. De Baets. Ordinal sums of triangular norms on a bounded lattice. *Fuzzy Sets and Systems*, 408:1–12, 2021. Aggregation Operators.
13. D. Ruiz and J. Torrens. Residual implications and co-implications from idempotent uninorms. *Kybernetika*, 40(1):21–38, 2004.
14. S. Saminger-Platz, E. P. Klement, and R. Mesiar. On extensions of triangular norms on bounded lattices. *Indagationes Mathematicae*, 19(1):135–150, 2008.
15. X. Yan and H. Zhou. Weak implications as ordinal sums of fuzzy implications and co-implications. *Information Sciences*, 718:122395, 2025.

Fuzzy-Transformer Fusion for Sentiment Analysis

Jesús González Gironda[1][0009−0007−6517−4772], Clara Simón de Blas[1][0000−0002−6963−1295], and Daniel Gómez[2,3][0000−0001−9548−5781]

[1] Universidad Rey Juan Carlos, Departamento de Informática y Estadística, Móstoles (España) jesusggironda01@gmail.com; clara.simon@urjc.es
[2] Universidad Complutense, Facultad de Estudios Estadísticos, Madrid (España)
[3] Instituto Universitario de Estadística y Ciencia de los Datos
dagomez@ucm.es

Abstract. El análisis de sentimientos es una disciplina que ha evolucionado rápidamente: desde los modelos originales basados en diccionarios (propios de la minería de textos o text-mining) y los modelos de clasificación tipo RNN y LSTM, hasta llegar a las actuales arquitecturas basadas en Transformers. Estas últimas capturan de manera efectiva relaciones semánticas más complejas. Sin embargo, los algoritmos basados en Transformers aún se enfrentan a numerosos desafíos en la actualidad. Entre ellos, uno de los más preocupantes se relaciona con cómo se aborda la ambigüedad y la variabilidad asociadas a la respuesta del Transformer, así como la manera en la que se modela la incertidumbre lingüística. Esta investigación en curso presenta un marco de trabajo que integra la lógica difusa en la capa de salida de Transformers pre-entrenados para modelar mejor el lenguaje subjetivo y ambiguo. Al permitir una representación gradual del sentimiento, en lugar de una clasificación binaria estricta, el enfoque propuesto mejora la interpretabilidad y la detección de emociones mixtas o poco claras. El resultado es un sistema más robusto y matizado, que preserva la eficiencia computacional original del Transformer.

Keywords: Transformers, Lógica difusa · Análisis del Sentimiento · Procesamiento del lenguaje · Interpretabilidad.

El paradigma digital ha redefinido fundamentalmente la interacción humana, estableciendo la comunicación digital como el principal medio de expresión individual y colectiva. En este contexto, la generación masiva de datos textuales en las plataformas de redes sociales constituye una persistente «huella comunicativa». Este rastro digital ofrece una perspectiva inestimable sobre las preferencias de los usuarios, la percepción de las marcas y el rendimiento de los productos, lo que posiciona al Análisis de Sentimientos (AS) como una herramienta fundamental para descifrar la opinión pública en la era moderna [1][3][4].

En sus inicios, los primeros modelos de análisis de sentimientos procesaban el texto mediante la tokenización de sus palabras y el uso de diccionarios para estimar la probabilidad de que un mensaje tuviera una connotación positiva, negativa o neutra. Esta vectorización, típica de la minería de textos (text-mining),

permitió abordar el problema desde la perspectiva del aprendizaje automático (Machine Learning). Representar un texto de manera vectorial posibilitó el salto hacia algoritmos más complejos, como las redes neuronales recurrentes (RNN) y las arquitecturas de memoria a corto y largo plazo (LSTM) [5].

Estos modelos sentaron las bases para el procesamiento secuencial; sin embargo, la aparición de la arquitectura Transformer y su mecanismo de autoatención marcaron un cambio definitivo en este campo [6]. Al asignar numéricamente una importancia relativa a cada token dentro de una secuencia, los Transformers facilitan la detección de dependencias semánticas complejas y relaciones contextuales de largo alcance que los modelos anteriores tenían dificultades para capturar.

A pesar de su notable capacidad para capturar el contexto, los algoritmos basados en Transformers no están exentos de limitaciones. Uno de los desafíos más críticos radica en la variabilidad y la incertidumbre predictiva intrínseca a estos modelos. Ante un mismo texto de entrada, diferentes arquitecturas preentrenadas (o incluso variaciones en el proceso de inferencia) pueden generar distribuciones de probabilidad divergentes. Esta falta de consenso refleja una vaguedad inherente en la respuesta del modelo, la cual es ignorada por las aproximaciones tradicionales que fuerzan una clasificación categórica basada en el modelo individual de mayor rendimiento.

Para abordar esta problemática, este estudio propone un marco de trabajo que integra la lógica difusa no solo para modelar la subjetividad del lenguaje humano, sino para modelar la incertidumbre predictiva de un conjunto de Transformers interpretando las diferentes salidas de los modelos como grados de pertenencia borrosas. La integración de las predicciones de múltiples modelos permite crear un ensamble robusto que capitaliza la divergencia de los algoritmos para alcanzar un consenso más fiable.

En este contexto, la lógica difusa emerge como un marco complementario ideal. Si bien el aprendizaje profundo destaca en el reconocimiento de patrones en grandes volúmenes de datos, la lógica difusa proporciona una base matemática rigurosa para abordar la incertidumbre y la ambigüedad lingüísticas ([2]). La integración de estos dos paradigmas permite crear modelos que no solo ofrecen un alto rendimiento, sino que también son más interpretables, capaces de representar las emociones como transiciones graduales en lugar de categorías binarias rígidas.

El estudio utiliza un corpus especializado de 8768 tuits relacionados con el conflicto de Gaza. Tras un riguroso proceso de preprocesamiento —que incluyó la eliminación de duplicados y el filtrado por idioma— se conservó un subconjunto final de 4469 tuits en español. Seleccionamos tres Transformers de última generación: DistilBERT, RoBERTa y ModernBERT. Para cada tuit, los modelos generan una distribución de probabilidad mediante softmax.

Para sintetizar la predicción final del sentimiento, proponemos un marco de agregación formal. Sea $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ sea el conjunto de n modelos Transformer preentrenados. Para cada tweet t y cada categoría emocional

$k \in \{l_1 = positive, l_2 = negative, l_3 = neutral\}$, obtenemos una puntuación agregada final s_{agg} aplicando un operador de agregación difusa Φ:

$$s_{\text{agg}}(k \mid t) = \Phi\left(p_1(k \mid t), p_2(k \mid t), \ldots, p_n(k \mid t)\right) \tag{1}$$

donde $p_i(k \mid t)$ representa el grado de pertenencia (probabilidad normalizada) asignado por el modelo m_i a la clase k. La clasificación final se determina por la clase que maximiza esta puntuación agregada:

$$\arg\max_{k \in \mathcal{Y}} s_{\text{agg}}(k \mid t) \tag{2}$$

En este estudio, exploramos varios operadores para Φ, incluyendo un operador OWA con orness de rango medio, máximo, mínimo y producto.

La integración de la lógica difusa en los flujos de trabajo basados en Transformers mejora significativamente la robustez del análisis de sentimientos en español. El conjunto OWA navega con éxito por las zonas "neutrales´´ y las emociones mixtas del discurso político complejo. En trabajos futuros se explorará el uso de ANFIS (Sistemas de Inferencia Neurodifusa Adaptativa) para aprender automáticamente reglas de agregación óptimas, reduciendo aún más la brecha entre el rendimiento neuronal y la interpretabilidad lingüística.

Agradecimientos Esta investigación ha sido financiada por el Plan del Gobierno español PID2024- 155289NB-I00 financiado por

MICIU/AEI/10.13039/501100011033 and ERDF/EU.

References

1. Do, H.N., Phan, H.T., Nguyen, N.T.: Multi-modal sentiment analysis using deep learning and fuzzy logic: A comprehensive survey. Applied Soft Computing **167**, 112279 (2024). https://doi.org/10.1016/j.asoc.2024.112279
2. Ji, D., Meng, W., Wang, H.: Emotional analysis of tourism reviews based on long short-term memory and fuzzy control algorithm. International Journal of Fuzzy Systems (2025). https://doi.org/10.1007/s40815-024-01890-1
3. Qin, J., Zeng, M., Wei, X., Pedrycz, W.: Ranking products through online reviews: A novel data-driven method based on interval type-2 fuzzy sets and sentiment analysis. Journal of the Operational Research Society **75**(5), 860–873 (2024). https://doi.org/10.1080/01605682.2023.2215823
4. Ramezani, E.B.: Sentiment analysis applications using deep learning advancements in social networks: A systematic review. Neurocomputing p. 129862 (2025)
5. Socher, R., Perelygin, A., Wu, J., Chuang, J., Manning, C.D., Ng, A.Y., Potts, C.: Recursive deep models for semantic compositionality over a sentiment treebank. In: Proceedings of the 2013 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP) (2013)
6. Tai, K.S., Socher, R., Manning, C.D.: Improved semantic representations from tree-structured long short-term memory networks. In: Proceedings of the 53rd Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (ACL) (2015)

Modelización de la polarización con conjuntos difusos opuestos

Estrella García-Pelluz[1][0009-0003-4341-3956], Juan Antonio Guevara[2][0000-0003-3946-3910], Javier Montero[3][0000-0001-8333-2155], and Juan Carlos Losada[4][0000-0002-4373-603X]

[1] Faculty of Mathematics, Complutense University, 28040 Madrid, Spain
[2] Faculty of Statistical Studies, Complutense University, 28040 Madrid, Spain
[3] Faculty of Mathematics and Instituto de Matemática Interdisciplinar, Complutense University, 28040 Madrid, Spain
[4] Complex Systems Group, Universidad Politécnica de Madrid, 28040 Madrid, Spain
{estrelga, juanguev, jamonter}@ucm.es, juancarlos.losada@upm.es

Abstract. Numerosos estudios han centrado su atención en el diseño de procedimientos para detectar módulos aislados dentro de una comunidad, haciendo hincapié en el riesgo de polarización en una sociedad fracturada. En este artículo, proponemos un modelo básico para analizar la polarización afectiva, señalando la importancia de tener en cuenta tanto el apoyo (amor) como el rechazo (odio) hacia cada alternativa, como sentimientos opuestos difusos. Restringidos a dos alternativas, representamos en el espacio $[-1,+1]^2$ el odio/amor individual a cada alternativa, para entonces proponer una nueva medida de polarización social.

Keywords: Polarización · Redes Sociales · Conjuntos difusos

1 Introducción

En las sociedades democráticas actuales parece no haber espacio para largos debates, no hay oportunidad de explicar acuerdos complejos. La toma de decisiones complejas basada en múltiples criterios se está reduciendo a problemas de toma de decisiones basados en un único criterio, que suele ser binario. Un sentimiento simple no necesita argumentos sofisticados, y las ideas simples se convierten fácilmente en ideas extremas. Además, dada la rapidez con la que se propagan, resulta bastante difícil reaccionar adecuadamente (p.e, contra las fake news).

Desde el punto de vista de la comunicación, la existencia de comunidades aisladas dentro de una sociedad es un riesgo de polarización. Pero con bastante frecuencia ese aislamiento no implica polarización por sí solo. La polarización surge cuandon una parte relevante de la sociedad ama una alternativa odiando al resto de alternativas y, al mismo tiempo, otra parte relevante de la sociedad ama una alternativa diferente odiando al resto de alternativas.

El argumento central de este artículo es la necesidad de tener en cuenta dos características opuestas para detectar la radicalización individual y la polarización social ante dos alternativas, midiendo el apoyo y el rechazo hacia cada una de ellas, y que tanto el apoyo (amor) como el rechazo (odio) tienen una naturaleza difusa y graduable, lo que permite distintos grados de intensidad. Nuestro objetivo es describir la radicalización y la polarización a partir de una escala de actitud definida en el intervalo $[-1, +1]$ para cada individuo y cada alternativa.

2 Trabajos Relacionados

El elemento clave que queremos presentar en este artículo es que debemos, de alguna manera, detectar y diferenciar los mensajes positivos de los negativos, para detectar la polarización. Además, es importante reconocer que estos matices positivos y negativos admiten gradaciones. Un primer enfoque consistiría en suponer que estos mensajes están a favor o en contra de una alternativa, en cierta medida. Esta situación puede modelarse mediante una escala de actitudes definida en el intervalo $[-1, 1]$ (ver [1]). Además, debemos tener en cuenta que la polarización no surge por distribuciones específicas de conexiones positivas o negativas fuertes y débiles, sino debido a la distribución antagónica de las conexiones de apoyo y rechazo. Esta visión fue capturada en [2] donde se proponen grados de pertenencia paa modelar el grado en que un individuo puede radicalizarse hacia ambos polos ideológicos simultáneamente, pero los autores no especifican explícitamente si un grado de pertenencia nulo debe interpretarse como un rechazo explícito de ese polo o simplemente como la ausencia de radicalización hacia él. Esta distinción no es trivial. La negación de un concepto no coincide necesariamente con su opuesto. La falta de pertenencia a un polo no implica automáticamente la pertenencia al opuesto, ya que «no pertenecer» a un concepto y «pertenecer a su opuesto» representan situaciones semánticas diferentes. En nuestra opinión, la cuestión clave subyacente fue planteada originalmente por Atanassov [3], quien destacó el hecho de que un conjunto difuso no puede entenderse sin tener en cuenta sus conceptos relacionados (véanse en particular los enfoques alternativos en [4].

3 Metodología propuesta

El argumento principal de este artículo es la necesidad de considerar dos características opuestas para detectar la radicalización y la polarización, mediante la medición tanto del apoyo como del rechazo hacia cada alternativa, y que tanto el apoyo (*amor*) como el rechazo (*odio*) poseen una naturaleza difusa (*fuzzy*) graduable, permitiendo distintos grados de intensidad.

Nuestro objetivo es describir la radicalización individual y la polarización social cuando la sociedad está enfrentada a dos alternativas, mediante una escala actitudinal definida sobre el cuadrado $[-1, 1]^2$.

Los valores negativos representan odio explícito hacia la alternativa, mientras que los valores positivos representan amor explícito.

Por tanto, la opinión de un individuo i de un grupo N respecto a dos alternativas α y β puede representarse como un punto $(x_i, y_i) \in [-1, 1]^2$, siendo x_i el grado de apoyo/rechazo de cada individuo a α, e y_i el grado de apoyo/rechazo de cada individuo a β.

El objetivo de este trabajo es trasladar al contexto bipolar en el sentido de [5] al riesgo de polarización JDJ presentado en [2], considerando los grados de pertenencia a los puntos de polarización $A = (+1, -1)$ y $B = (-1, +1)$ para cada grupo.

Para cada individuo $i \in N$, los grados de pertenencia del individuo i a los puntos de polarización A y B, respectivamente, los vamos a calcular mediante una distancia normalizada en $[0, 1]$ de cada $(x, y) \in [-1, 1]^2$ a A y a B: $\mu_A(i), \mu_B(i) \in [0, 1]$.

Consideremos una función de agregación apropiadan (p.e., overlapping)

$$\varphi : [0, 1]^2 \to [0, 1]$$

y otra función de agregación (p.e., una función de grouping)

$$\psi : [0, 1]^2 \to [0, 1]$$

para combinar los grados de pertenencia en la construcción de medidas de polarización. En particular,nuestra versión bipolar del índice JDJ, denominada medida de polarización AJDJ, se define como:

$$AJDJ(Z) = \sum_{i,j \in N} \psi(\varphi(\mu_A(i), \mu_B(j)), \varphi(\mu_B(i), \mu_A(j))) \,. \tag{1}$$

donde ψ, φ son funciones de agregación definidas en el intervalo $[0, 1]$.

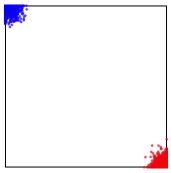
4 Resultados Preeliminares

El objetivo de esta sección es simplemente comprobar que nuestro modelo se comporrta de forma intuitiva en diferentes circunstancias, es decir, que AJDJ capta la polarización colectiva, midiendo el grado en que los individuos de la población se oponen entre sí en función de sus afiliaciones ideológicas.

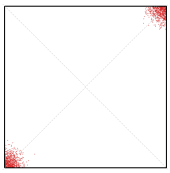
Para comprobar la intuición del índice propuesto, consideramos las siguientes funciones de overlapping y groupping (t-norma y t-conorma):

$$\varphi(a, b) = \min(a, b), \qquad \psi(a, b) = a + b - ab, \qquad a, b \in [0, 1]. \tag{2}$$

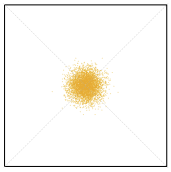
Los resultados que se obtienen para los diferentes diferentes distribuciones de opiniones individuales son:



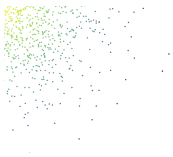
AJDJ=0.94292



AJDJ=0.23895



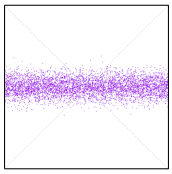
AJDJ=0.55308



AJDJ=0.14053



AJDJ=0.60041



AJDJ=0.60934

5 Conclusión

El siguiente paso inmediato, además de probar nuestra nueva medida con datos reales de redes sociales, consiste en explorar diferentes medidas de apoyo y rechazo, analizar diferentes grados de radicalización y polarización con más de dos alternativas y analizar también diferentes métodos de agregación para representar el riesgo de polarización. Nuestro modelo nos permitirá, además, medir la demanda social de una tercera alternativa.

References

1. Losada, J.C., Robles, J.M., Benito, R.M., Caballero, R.: Love and Hate During Political Campaigns in Social Networks. In: Benito, R.M. et al. (eds.) Complex Networks & Their Applications X. Studies in Computational Intelligence, vol. 1073, pp. 66–77. Springer, Cham (2022). https://doi.org/10.1007/978-3-030-93413-2_6
2. Guevara, J.A.: Polarization Measures in Social Networks. Doctoral dissertation (in Spanish), Complutense University of Madrid (2022). `https://hdl.handle.net/20.500.14352/4170`
3. Atanassov, K.: Intuitionistic fuzzy sets. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 35 (1999). https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3
4. Bustince, H., Barrenechea, E., Burusco, A., Fernández, J., Rodríguez, J.T., Montero, J., Pagola, M., Gómez, D.: From Trillas' Negations and Antonyms to a Set Representation of Contradiction Within Bipolar and Other Extensions of Fuzzy Sets. Studies in Fuzziness and Soft Computing **323**, 159-177 (2015). https://doi.org/10.1007/978-3-319-18606-1_15
5. Montero, J., Bustince, H., Franco, C., Rodríguez, J.T., Gómez, D., Pagola, M., Fernández, J., Barrenechea, E.: Paired structures in knowledge representation. Knowledge-Based Systems **100**, 50-58 (2016). https://doi.org/10.1016/j.knosys.2016.02.003

Efficient Ranking and Unranking of Discrete Fuzzy Numbers

Manuel González-Hidalgo[1,2], Arnau Mir[1], Alejandro Mus[1], and Juan Vicente Riera[1]

[1] Soft Computing, Image Processing and Aggregation Research Group (SCOPIA), Artificial Intelligence Research, Institute of the Balearic Islands (IAIB), Health Research Institute of the Balearic Islands (IdISBa), Mathematics and Computer Science Department, University of the Balearic Islands, Spain
{manuel.gonzalez,arnau.mir,alejandro.mus,jvicente.riera}@uib.es
[2] Laboratory of Artificial Intelligence Applications (LAIA@UIB)

Abstract. Discrete fuzzy numbers are a useful representation of linguistic information, but recent constructions based on total orders require repeated evaluations of the position map and its inverse. A direct implementation enumerates or sorts the whole ordered set, whose size grows combinatorially with the number of membership levels. This ongoing research develops exact ranking and unranking algorithms for discrete fuzzy numbers on a finite chain. The approach exploits nested α-cuts and closed-form combinatorial counts while avoiding exhaustive enumeration. The resulting procedures compute pos and pos^{-1} in $O(n^2 m \log n)$ time with constant extra memory. Preliminary experiments confirm the expected linear scaling in the number of membership values for fixed n.

Keywords: Discrete fuzzy numbers · Total orders · Ranking · Unranking · Computational efficiency

1 Motivation

Discrete fuzzy numbers (DFNs) are widely used in computing-with-words and decision-making models because they combine finite linguistic chains with gradual membership information [1–3].

Let $\mathcal{D}_1^{L_n \to Y_m}$ denote the finite family of dfns with support in a closed subinterval of $L_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ and membership values in $Y_m = \{0 = y_1 < y_2 < \cdots < y_m = 1\}$. Its cardinality is [1]

$$|\mathcal{D}_1^{L_n \to Y_m}| = \binom{n + 2m - 2}{2m - 2}. \tag{1}$$

A total order on intervals can be extended to a total order $\preceq_\delta^{\Delta\downarrow}$ on $\mathcal{D}_1^{L_n \to Y_m}$, yielding a finite chain of cardinality $|\mathcal{D}_1^{L_n \to Y_m}|$. This enables the definition of

aggregation and implication functions on DFNs by transporting operators from $L_k = \{0, \dots, k\}$, where $k = |\mathcal{D}_1^{L_n \to Y_m}| - 1$ [4, 5, 1], through the *position map*

$$\mathrm{pos} : \mathcal{D}_1^{L_n \to Y_m} \to L_k, \qquad \mathrm{pos}(A) = \left|\{X \in \mathcal{D}_1^{L_n \to Y_m} \mid X \preceq_\delta^{\Delta\downarrow} A\}\right| - 1,$$

an order isomorphism between $(\mathcal{D}_1^{L_n \to Y_m}, \preceq_\delta^{\Delta\downarrow})$ and $(L_k, \leq)$ [1].

However, the computation of $pos(A)$ suggests a brute-force approach requiring the generation, sorting, and search of all DFNs, which quickly becomes infeasible as m grows. The aim of this work is to compute the ranking $\mathrm{pos}(A)$ and unranking $\mathrm{pos}^{-1}(i)$ exactly, without materialising the complete ordered space.

2 Explicit pseudocode for ranking and unranking

Let $\mathcal{I}(L_n)$ be the set of closed intervals $[a, b] \subseteq L_n$, ordered by a fixed total order $\preceq$ defined on this set. Since $|\mathcal{I}(L_n)| = (n + 1)(n + 2)/2$, every α-cut of $A \in \mathcal{D}_1^{L_n \to Y_m}$ can be treated as an element of a finite interval chain. The α-cut notation and its reconstruction role are detailed in [1]. The following algorithms consider all levels of each DFN, beginning at $y_m = 1$ and going down to $y_1 = 0$, using the nesting property of α-cuts.

For an interval $[a, b]$ occupying the j-th position in $\mathcal{I}(L_n)$, let $\mathrm{SDFN}(a, b, j)$ denote the set of generalized DFNs whose maximum membership value is y_j exactly on $[a, b]$, while the remaining values belong to $\{y_1, \dots, y_j\}$. The consideration of these sets is a key idea in our algorithms. Their cardinality [1] is given by

$$|\,\mathrm{SDFN}(a, b, j)| = \binom{a + j - 2}{j - 2}\binom{n - b + j - 2}{j - 2} \tag{2}$$

The formula separates the choices to the left and right of the core interval: the left branch is nondecreasing and the right branch is nonincreasing. Hence, the number of DFNs below a candidate α-cut can be computed by summing products of binomial coefficients instead of enumerating objects.

Based on the previous considerations, the two procedures below are written explicitly as pseudocode blocks, following the ranking–unranking construction of [1]. Both use the same ordered block decomposition of $\mathcal{D}_1^{L_n \to Y_m}$. Unranking locates the residual index within the first compatible block whose cumulative size reaches its one-based residual rank, while ranking accumulates the sizes of all compatible blocks preceding the observed α-cut.

Algorithm 1. Unranking algorithm for $\mathrm{pos}^{-1}(i)$.
Input: index $i \in \{0, \dots, |\mathcal{D}_1^{L_n \to Y_m}| - 1\}$; ordered intervals $I_1 \prec \cdots \prec I_{|\mathcal{I}(L_n)|}$.
Output: the DFN A such that $\mathrm{pos}(A) = i$.

$r \leftarrow i + 1$; $A^{y_{m+1}} \leftarrow \emptyset$; $k_{m+1} \leftarrow |\mathcal{I}(L_n)|$.
for $j = m, m - 1, \dots, 1$ **do**
  $C_j \leftarrow \{I_\ell \mid A^{y_{j+1}} \subseteq I_\ell,\ \ell \leq k_{j+1}\}$.
  write $C_j = \{I_1^{(j)} \prec \cdots \prec I_{s_j}^{(j)}\}$, with $I_h^{(j)} = [a_h, b_h]$.
  find the least q such that $\sum_{h=1}^{q} |\,\mathrm{SDFN}(a_h, b_h, j)| \geq r$.
  $A^{y_j} \leftarrow I_q^{(j)}$; $k_j \leftarrow q$.
  $r \leftarrow r - \sum_{h<q} |\,\mathrm{SDFN}(a_h, b_h, j)|$.
end for
return reconstruct$(A^{y_1}, \dots, A^{y_m})$.

Algorithm 2. Ranking algorithm for $\mathrm{pos}(A)$.
Input: a DFN $A \in \mathcal{D}_1^{L_n \to Y_m}$; ordered intervals $I_1 \prec \cdots \prec I_{|\mathcal{I}(L_n)|}$.
Output: the index $i = \mathrm{pos}(A)$.

```
r ← 0; compute the α-cuts A^{y_j}, j = 1, ..., m.
A^{y_{m+1}} ← ∅.
for j = m, m − 1, ..., 1 do
    C_j ← {I_ℓ | A^{y_{j+1}} ⊆ I_ℓ, I_ℓ ⪯ A^{y_j}}.
    for each I_ℓ = [a_ℓ, b_ℓ] ∈ C_j \ {A^{y_j}} do
        r ← r + |SDFN(a_ℓ, b_ℓ, j)|.
    end for
end for
return r.
```

The block sizes used in both algorithms are exactly the values in Eq. (2). In Algorithm 2 the set C_j includes the observed cut A^{y_j}, but the loop sums only the blocks that precede it. The procedures are mutually consistent because they traverse the same nested blocks in opposite directions. At each membership level, the candidate interval set has size at most $O(n^2)$. If it is sorted or searched according to the chosen interval order, the cost per level is $O(n^2 \log n)$. Thus, both algorithms run in

$$O(n^2 m \log n), \tag{3}$$

using constant extra memory apart from the representation of the input or output DFN. This replaces brute-force enumeration over $|\mathcal{D}_1^{L_n \to Y_m}|$ elements, whose dependence on m is combinatorial.

3 Preliminary empirical evidence

The full execution-time table is more informative than a single example, because it shows the practical scaling of both routines across one order of magnitude in the number of membership levels. We evaluated the algorithms in Python using the interval order t-inc. The experiments fixed $n = 10$, varied m from 100 to 1000, and used $K = 500$ uniformly sampled indices per configuration. Correctness was checked by verifying $\mathrm{pos}(\mathrm{pos}^{-1}(i)) = i$ in every trial. Table 1 reports the mean runtime and standard deviation for unranking and ranking, following [1].

Table 1. Average execution time as a function of m for fixed $n = 10$. Results over $K = 500$ trials; order=t-inc.

m	unrank $\bar{t}_m$ (ms)	unrank s_m (ms)	rank $\bar{t}_m$ (ms)	rank s_m (ms)
100	0.870	0.172	0.810	0.173
200	1.713	0.322	1.565	0.310
300	2.660	0.503	2.426	0.481
400	3.554	0.768	3.255	0.742
500	4.486	0.932	4.113	0.888
600	5.392	1.080	4.955	1.049
700	6.253	1.300	5.746	1.263
800	7.207	1.396	6.606	1.349
900	7.924	1.600	7.272	1.553
1000	8.960	1.822	8.205	1.739

The table confirms the expected near-linear growth in m for fixed n, in agreement with the m-dependence predicted by Eq. 3 for fixed n. A linear fit for $m \geq 400$ gives slopes 8.90×10^{-3} and 8.15×10^{-3} ms per level for unranking and ranking, with intercepts about 3×10^{-2} ms. Thus, for $n = 10$, the

measured per-level cost is about 8–9 microseconds. This evidence supports using the routines inside position-based operators of the form $F_{\mathcal{D}_1^{L_n \to Y_m}}(A, B) = \mathrm{pos}^{-1}(F(\mathrm{pos}(A), \mathrm{pos}(B)))$, where repeated rank/unrank calls replace a precomputed table of the whole lattice.

4 Conclusions and ongoing work

This work turns the position isomorphism used in recent algebraic constructions on DFNs into an operational indexing mechanism. The proposed procedures compute pos and pos^{-1} exactly, avoid storing the whole set $\mathcal{D}_1^{L_n \to Y_m}$, and reduce the dependence on the number of membership levels to a linear one for fixed n. This is relevant when position-based implication and aggregation functions must be evaluated many times. Ongoing work focuses on optimising the implementation for several interval orders, integrating the routines into position-based logical operators, and extending the same strategy to discrete Z-numbers, where value and reliability components introduce a richer two-level ordering problem. A complementary benchmark will compare against explicit enumeration, including peak memory, to quantify the practical break-even point.

Acknowledgments

The authors would like to acknowledge the support of the *Programa de Foment de la Recerca i la Innovació de la Universitat de les Illes Balears 2024–2026.*

References

1. Mir, A., Mus, A., Riera, J.V.: An Efficient Computational Framework for Discrete Fuzzy Numbers Based on Total Orders. arXiv:2511.17080 (2025). doi:10.48550/arXiv.2511.17080
2. Voxman, W.: Canonical representations of discrete fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems **118**, 457–466 (2001)
3. Massanet, S., Riera, J.V., Torrens, J., Herrera-Viedma, E.: A new linguistic computational model based on discrete fuzzy numbers for computing with words. Information Sciences **258**, 277–290 (2014)
4. Riera, J.V., Massanet, S., Bustince, H., Fernandez, J.: On admissible orders on the set of discrete fuzzy numbers for application in decision making problems. Mathematics **9**, 95 (2021)
5. González-Hidalgo, M., Massanet, S., Mir, A., Riera, J.V., Miguel, L.D.: On fuzzy implication functions based on admissible orders on the set of discrete fuzzy numbers. International Journal of Computational Intelligence Systems **18**, 130 (2025)
6. Munar, M., Massanet, S., Ruiz-Aguilera, D.: On the cardinality of some families of discrete connectives. Information Sciences **621**, 708–728 (2023)

WIFE, un entorno para crear modelos difusos

Juan Moreno-Garcia[1][0000−0003−2430−145X], David Muñoz-Valero[1][0000−0002−2509−9911], Enrique Adrian Villarrubia-Martin[2][0009−0002−8006−5711], Julio Alberto López-Gómez[2][0000−0001−6291−6637], and Luis Jimenez-Linares[1][0000−0002−2737−5887]

[1] Escuela de Ingeniería Industrial y Aeroespacial, Departamento de Tecnologías y Sistemas de Información, Universidad de Castilla-La Mancha, 45071, Toledo, España
juan.moreno,david.munoz@uclm.es
[2] Escuela Superior de Informática, Departamento de Tecnologías y Sistemas de Información, Universidad de Castilla-La Mancha, 13071, Ciudad Real, España
enrique.villarrubia,julioalberto.Lopez,luis.jimenez@uclm.es

Abstract. Se presenta un entorno software desarrollado en Python para la construcción, análisis y ejecución de modelos difusos. El entorno está operativo, pero todavía no cuenta con todas las funcionalidades deseadas. El sistema permite implementar modelos de inferencia clásicos basados en Mamdani y Takagi-Sugeno-Kang (TSK), integrando ambos enfoques dentro de una arquitectura común. Sin embargo, su principal aportación radica en su flexibilidad estructural, que posibilita la construcción de estructuras difusas más complejas que los modelos tradicionales, siendo adecuada tanto para investigación como para docencia.

Keywords: Inferencia difusa · Modelos difusos · Estructuras difusas

1 Introducción

La lógica difusa constituye una herramienta fundamental para el modelado de sistemas complejos caracterizados por incertidumbre, imprecisión o conocimiento heurístico. Tradicionalmente, los modelos difusos más utilizados en la literatura son los modelos de tipo Mamdani y los modelos de tipo TSK, aunque también es usual experimentar con otras estructuras adaptadas al problema tratado. Se propone un entorno software que no solo implementa estos modelos, sino que proporciona una base sólida para el desarrollo de nuevas estructuras difusas ofreciendo implementaciones de las componentes teóricos fundamentales. El entorno propuesto se fundamenta en tres ideas principales que, utilizadas conjuntamente, lo distinguen de otros entornos existentes en la actualidad:

(1) **Aprovechamiento de la potencia del lenguaje Python**: Una de las carácterísticas principales de Python es la denominada *First-class function*[3] [1]. Aunque el soporte de funciones como elementos de primer nivel no es exclusivo

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/First-class_function

de Python y está presente en numerosos lenguajes modernos, este destaca especialmente por la amplitud de su ecosistema y su comunidad, que facilitan la reutilización y extensión del software en múltiples dominios. Asimismo, si bien su rendimiento en ejecución es inferior al de lenguajes compilados, su alta productividad y la posibilidad de apoyarse en librerías altamente optimizadas permiten obtener soluciones eficientes con un coste de desarrollo reducido. Referente a esto, también es destacable que los lenguajes interpretados facilitan el uso de archivos externos que contienen funciones o definiciones, permitiendo su carga dinámica dentro del programa sin necesidad de recompilación.

(2) **Diseño modular utilizando programación orientada a objetos**: Cada uno de los componentes fundamentales de la lógica difusa se encapsula en clases independientes pero interrelacionadas que hacen uso de la herencia. Este enfoque no solo favorece la modularidad y la reutilización del código, sino que también permite una clara separación de responsabilidades, facilitando tanto la comprensión como la extensión del sistema.

(3) **Evitar el uso de representaciones discretas**: En el diseño de WIFE se ha optado deliberadamente por evitar representaciones discretizadas en los modelos y estructuras difusas durante las fases de diseño y de inferencia de modelos y estructuras, priorizando el uso de representaciones continuas. Esta decisión responde a criterios de eficiencia computacional, ya que el uso de funciones de pertenencia definidas de forma continua permite evaluar directamente los grados de pertenencia sin necesidad de iteraciones extensivas.

En la siguiente sección se describe la arquitectura actual del sistema. La Sección 3 se describen los componentes que permiten crear los modelos junto con la inferencia, está centrado en modelos tipo Mamdani y TSK. Finalmente, en la Sección 4 se detallan las conclusiones y trabajo futuro.

2 Arquitectura del sistema

Cada elemento teórico se modela explícitamente para ser utilizado de manera flexible en las distintas estructuras difusas:

Operadores lógicos difusos: Se implementan operadores básicos como t-normas y t-conormas, definidos como funciones independientes y agrupados en un diccionario *Python* que permite seleccionar el operador adecuado mediante el uso de la clave, posibilitando su escalado.

Conjuntos difusos: El sistema define clases para representar conjuntos difusos mediante una clase con funciones de pertenencia parametrizables (triangulares, trapezoidales, etc.). Además, se incluyen estructuras alternativas para representar el conocimiento de forma discreta.

Variables lingüísticas: Se modelan como estructuras que contienen la información necesaria para modelar completamente su definición teórica.

Sistema de proposiciones: Se definen dos tipos de proposiciones, proposiciones atómicas y proposiciones compuestas (basadas en atómicas y otras compuestas), lo que permite construir expresiones lógicas complejas de manera estructurada y facilita el desarrollo de modelos no estándar.

3 Creación y uso de modelos difusos

En esta sección se ilustra cómo, a partir de los conceptos básicos previamente definidos, es posible construir modelos difusos completos y utilizar dichos modelos para realizar procesos de inferencia. Se describe, por tanto, no solo la creación de las distintas estructuras —variables, conjuntos y reglas—, sino también su integración en sistemas funcionales capaces de procesar entradas y generar salidas, poniendo de manifiesto el flujo completo desde la definición teórica hasta su aplicación práctica. Se dispone de las clases que permiten trabajar con los modelos tipo Mamdani y TSK, concretamente, el entorno incluye clases específicas para: (1) Creación e inferencia con modelos tipo Mamdani y; (2) Diseño e inferencia con modelos tipo TSK.

Las reglas difusas se modelan como objetos independientes que combinan un antecedente lógico estructurado y un consecuente —difuso o funcional—, lo que permite mantener un mecanismo de inferencia uniforme independientemente del modelo. En este contexto, dado que la diferencia fundamental entre los enfoques reside en el tratamiento del consecuente, se ha optado por emplear conjuntos difusos en Mamdani y funciones dependientes de las entradas en TSK. Sea la regla:

IF ((T is *Cold*) OR (T is *Medium*)) AND (H is *Low*)
THEN S is *Comfortable*

donde T, H y S son las variables lingüísticas que modelan la temperatura (T), la humedad (H) y la sensación corporal (S). Además, *Cold* y *Medium* son conjuntos difusos de la variable T, *Low* es un conjunto difuso de la variable H y *Comfortable* es un conjunto difuso de la variable S.

El siguiente código muestra cómo se crean los distintos operadores definiendo una función por cada operador y añadiendo la entrada correspondiente en el diccionario *functions* (líneas 1-11), accediendo al elemento deseado con etiqueta de la función. De las líneas 13-25 se muestra cómo se crea una regla. Se hace uso de la proposición compuesta que define el antecedente (líneas 13-15) junto con las variables lingüísticas *temp_vl*, *hum_vl* y *sensa_vl*. Se crea el consecuente como la proposición atómica S is *Comfortable*, al ser un modelo tipo Mandani, utilizando el constructor *FuzzyAP* (líneas 16 y 19). Se crea la regla mediante el constructor *MandaniRule()* que cuenta con el identificador de la regla (línea 18), la proposición difusa compuesta se crea utilizando el constructor de ésta, *PDC(ant,functions)* (línea 19), y, finalmente, la proposición difusa que modela el consecuente mediante el constructor *FuzzyAP()* (líneas 20-25). Finalmente, se crea el modelo invocando al constructor *MandaniFuzzyModel()*. La clase *MandaniFuzzyModel()* tiene implementado el proceso de inferencia. También existe la versión para modelos tipo TSK.

```
1 def and_t_norm(val1:float, val2:float):
2     return min(val1,val2)
3 def or_t_conorm(val1:float, val2:float):
4     return max(val1,val2)
5 def not_operator(val1:float):
6     return 1-val1
```

```
functions = {
    'AND': and_t_norm,
    'OR': or_t_conorm,
    'NOT': not_operator
}
ant = [
    [[temp_vl, 'Cold'], 'OR', [temp_vl, 'Medium']],
    'AND', [hum_vl, 'Low'] ]
cons = [sensa_vl, 'Comfortable']
R1 = MandaniRule(
    'R1',
    PDC(ant, functions),  # antedent
    FuzzyAP(  # consequent
        LinguisticV(sensa_vl['name'], sensa_vl['position'],
                    sensa_vl['support'], sensa_vl['sets']),
        sensa_vl['sets'][cons[1]]
    )
)
modelo = MandaniFuzzyModel([R1, R2, R3, R4, R5, R6])
```

Código 1.1. Definiendo los operadores

4 Conclusiones y trabajos futuros

Se ha presentado un entorno software para lógica difusa que integra modelos tipo Mamdani y TSK, cuya principal aportación es su carácter abierto y extensible. No impone una estructura fija, permitiendo la construcción de nuevas arquitecturas difusas a partir de componentes básicos bien definidos. Destaca su modularidad y reutilización de componentes y su adecuación para investigación y la docencia. Como trabajo futuro se añadirán nuevos modelos de inferencia, como variantes avanzadas de TSK o enfoques híbridos basados en aprendizaje automático, que permitan ajustar automáticamente los parámetros de los conjuntos difusos y las reglas a partir de datos. También se podrían mejorar las clases desarrolladas y los mecanismos de visualización e interpretación de resultados.

Acknowledgments. Los autores agradecen al departamento de Tecnologías y Sistemas de Información (TSI) de la Universidad de Castilla la Mancha (UCLM) y al proyecto ATENEA: Aprendizaje Profundo, Metaheurísticas y Conocimiento Experto para Sistemas Multiagente en Entornos Ferroviarios Liberalizados Parcialmente Observables (Referencia 2025-GRIN-38352), cofinanciado por el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER), la financiación necesaria para la difusión de este trabajo. Además, se realizó cuando Enrique Adrian Villarrubia-Martin era becario predoctoral de la UCLM financiado por el Fondo Social Europeo Plus (FSE+).

References

1. Abelson, H., Sussman, G.J., Sussman, J.: Structure and Interpretation of Computer Programs, Second edition, MIT Press, 2010

Intervalos semánticos difusos para la transferencia de conocimiento entre sistemas de bicicletas compartidas

Francisco J. Márquez-Saldaña[1], Francisco A. Márquez[2], Gonzalo A. Aranda-Corral[2], and Joaquín Borrego-Díaz[1]

[1] Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, Universidad de Sevilla, Sevilla, España
{fmarquez,jborrego}@us.es
[2] Dpto. de Tecnologías de la Información, Universidad de Huelva, Huelva, España
{alfredo.marquez,gonzalo.aranda}@dti.uhu.es

Resumen La identificación interoperable de patrones diarios de uso en sistemas de bicicletas compartidas (BSS) se ha abordado recientemente mediante la semantización de la curva de demanda en cinco intervalos —*noche*, *trabajo*, *mañana*, *almuerzo* y *tarde*— con fronteras temporales nítidas ajustadas manualmente por sistema. En este trabajo en curso proponemos una reformulación basada en lógica difusa donde cada intervalo se modela como un conjunto difuso sobre $[0, 24)$ mediante funciones de pertenencia trapezoidales aprendidas de forma no supervisada a partir de la curva tipo de cada ciudad. La nueva representación sustituye a la etapa de semantización, habilita una agregación robusta de la demanda mediante la mediana ponderada difusa y permite cuantificar el solapamiento conceptual entre franjas como huella cultural del sistema.

Keywords: Lógica difusa · Variables lingüísticas · Series temporales · Sistemas de bicicletas compartidas · Transferencia de conocimiento.

1. Introducción

Los Sistemas de Bicicletas Compartidas (BSS, del inglés *Bike Sharing Systems*) son un área de notable interés dentro de la movilidad urbana sostenible [1]. La naturaleza estocástica de la demanda y la influencia de factores exógenos –meteorología, infraestructura, eventos– condicionan su operación, y la identificación de patrones de uso a nivel de estación constituye un paso previo a la predicción de demanda o el reequilibrado de la flota.

Los autores hemos propuesto recientemente *Pearclustering* [3], un algoritmo de clasificación no supervisada basado en la correlación de Pearson como distancia de disimilitud que, combinado con una representación *semantizada* de la curva diaria en cinco *intervalos* —*noche*, *trabajo*, *mañana*, *almuerzo* y *tarde*— con fronteras nítidas ajustadas manualmente por ciudad, transfiere el conocimiento aprendido a sistemas no contemplados en el entrenamiento. Esta estrategia adolece de tres limitaciones: (i) los conceptos manejados son intrínsecamente

graduales –las 13:45 son *almuerzo* "casi total" en Sevilla y solo "parcialmente" en Dublín–, por lo que la asignación nítida pierde información; (ii) la fijación manual de los cortes es subjetiva y no escala a la incorporación automática de nuevos sistemas; y (iii) la representación *crisp* no permite cuantificar el solapamiento conceptual entre franjas.

En esta investigación en curso reformulamos los intervalos semánticos como variables lingüísticas [4] mediante conjuntos difusos sobre $[0, 24)$, con funciones de pertenencia aprendidas a partir de la curva tipo de cada sistema.

2. Trabajo previo: intervalos semánticos crisp

Sea i un sistema BSS y $D^i(t)$ la demanda registrada (bicicletas tomadas o devueltas) en el instante $t \in [0, 24)$, agregada por hora. En [3] la curva diaria se semantiza dividiendo el dominio en $m = 5$ intervalos disjuntos $\{[t_n, t_{n+1})\}_{n=1}^{m}$ con $t_1 = 0$, $t_{m+1} = 24$, asociando cada uno a un concepto c_n del conjunto

$$\mathcal{C} = \{\text{NOCHE}, \text{TRABAJO}, \text{MAÑANA}, \text{ALMUERZO}, \text{TARDE}\}.$$

La demanda agregada al intervalo n es $\widehat{D}_n^{\,i} = \text{Med}\{D^i(t_k) : t_n \le t_k < t_{n+1}\}$, donde la mediana mitiga el efecto de los valores anómalos. Los puntos de corte $\{t_n\}$ se eligen manualmente por inspección visual de la curva tipo, garantizando que un mismo c_n refleje el mismo concepto operativo en sistemas distintos pese a las diferencias horarias entre ciudades. No obstante, los cortes nítidos producen discontinuidades artificiales y dificultan la captura de comportamientos que "viven" en la frontera entre dos conceptos.

3. Propuesta: intervalos semánticos difusos

3.1. Definición formal

Reformulamos cada concepto $c_n \in \mathcal{C}$ como un conjunto difuso $\tilde{c}_n$ sobre el dominio temporal con función de pertenencia $\mu_n^i : [0, 24) \to [0, 1]$, específica de cada sistema i. Adoptamos la condición de *partición difusa de Ruspini* [5]

$$\sum_{n=1}^{m} \mu_n^i(t) = 1 \quad \forall\, t \in [0, 24), \tag{1}$$

que preserva la interpretación de los grados de pertenencia como pesos normalizados y recupera la partición *crisp* como caso límite cuando cada μ_n^i degenera en la función indicadora del intervalo correspondiente. Para mantener la interpretabilidad, modelamos cada μ_n^i mediante una función trapezoidal definida por cuatro parámetros $(a_n^i, b_n^i, c_n^i, d_n^i)$ con $a_n^i \le b_n^i \le c_n^i \le d_n^i$:

$$\mu_n^i(t) = \text{máx}\left\{0,\ \text{mín}\left\{\frac{t - a_n^i}{b_n^i - a_n^i},\ 1,\ \frac{d_n^i - t}{d_n^i - c_n^i}\right\}\right\}, \tag{2}$$

imponiendo $d_n^i = b_{n+1}^i$ y $c_n^i = a_{n+1}^i$ entre conjuntos vecinos para satisfacer (1) por construcción.

3.2. Aprendizaje de las funciones de pertenencia

Frente al ajuste manual del enfoque *crisp*, los parámetros se estiman automáticamente a partir de la curva tipo $\bar{D}^{\,i}(t) = \mathrm{Med}_d\, D_d^i(t)$. El procedimiento, desatendido y reproducible, consta de cuatro pasos: (1) suavizado de $\bar{D}^{\,i}(t)$ por estimación de núcleos (KDE [6]) con ancho de banda por validación cruzada; (2) detección de máximos locales, cuyos entornos anclan los núcleos b_n^i y c_n^i (donde $\mu_n^i = 1$) correspondientes a los picos conceptuales de *trabajo* y *almuerzo*; (3) detección de mínimos locales, que delimitan las transiciones *noche* → *trabajo*, *trabajo* → *mañana*, *mañana* → *almuerzo* y *almuerzo* → *tarde*; y (4) cierre por Ruspini, fijando a_n^i y d_n^i con el solapamiento necesario entre conjuntos vecinos. El método permite incorporar nuevos sistemas sin reajuste manual.

3.3. Agregación difusa y compatibilidad con el pipeline existente

La generalización natural de la agregación *crisp* es la *mediana ponderada difusa*. Sean $\{D^{\,i}(t_k)\}_{k=1}^K$ los valores horarios de demanda en un día y $w_{n,k} = \mu_n^i(t_k)$ sus grados de pertenencia al intervalo n. Definimos la demanda difusa agregada como

$$\widetilde{D}_n^i = \mathrm{Med}_{w_{n,\cdot}}\big\{D^{\,i}(t_k)\big\}_{k=1}^K, \tag{3}$$

donde Med_w es la mediana ponderada (el valor que separa la masa total de pesos en dos mitades). Esta definición conserva la robustez frente a anomalías del enfoque *crisp* y degrada de forma suave los valores cercanos a las fronteras, eliminando los saltos artificiales introducidos por los cortes nítidos. Como el vector $\widetilde{\mathbf{D}}^{\,i,j} = (\widetilde{D}_1^{i,j}, \ldots, \widetilde{D}_m^{i,j})$ asociado a la estación j del sistema i tiene la misma dimensionalidad que su contraparte *crisp*, todo el pipeline posterior de *Pearclustering* —matriz de correlaciones, agregación de bicicletas tomadas y devueltas, e inferencia sobre sistemas no vistos— se mantiene sin modificación.

4. Diseño experimental en curso

Datos y comparativa. Replicamos el banco de pruebas de [3]: entrenamiento sobre los sistemas de Sevilla, Lyon y Dublín; validación sobre Valencia, Bruselas y Amiens. El histórico cubre un año completo de información extraída del proceso ETL multi-sistema descrito en [2]. Se contrastará el enfoque difuso frente al *crisp* a tres niveles: (i) estabilidad de las funciones de pertenencia aprendidas frente a la sensibilidad observada en la elección manual; (ii) calidad del clustering medida mediante el coeficiente de silueta sobre la matriz de correlaciones de Pearson; y (iii) coherencia geográfica de las etiquetas inferidas en los sistemas de validación, evaluada mediante contraste GIS con capas de oficinas, ocio y áreas residenciales.

Solapamiento conceptual como subproducto. La naturaleza difusa de la representación permite definir el grado de *solapamiento conceptual* entre los conjuntos difusos $\tilde{c}_n$ y $\tilde{c}_{n'}$ como

$$\Omega_{n,n'}^i = \int_0^{24} \min\big\{\mu_n^i(t),\, \mu_{n'}^i(t)\big\}\, dt, \tag{4}$$

indicador novedoso de la borrosidad cultural del sistema. La hipótesis preliminar es que las ciudades con horarios sociolaborales rígidos (p. ej. Dublín) presentarán valores $\Omega^i_{n,n'}$ menores que las de horario flexible (p. ej. Sevilla), lo que proporcionaría una caracterización cuantitativa de la *huella horaria* de cada sistema.

5. Conclusiones y trabajo futuro

Hemos presentado una reformulación difusa de los intervalos semánticos para la identificación interoperable de patrones diarios en BSS. La propuesta sustituye las fronteras nítidas por funciones de pertenencia trapezoidales aprendidas automáticamente de la curva tipo, eliminando la subjetividad del ajuste manual, proporcionando una agregación de la demanda más fiel a su carácter gradual y aportando, sin coste adicional, un indicador cuantitativo de la borrosidad horaria del sistema.

Las líneas inmediatas de continuación incluyen: (i) la extensión natural a un *Fuzzy C-Means* [7] con distancia de Pearson, sustituyendo la asignación dura de clusters por una pertenencia gradual; (ii) la integración de las demandas difusas $\widetilde{D}^i_n$ como variables lingüísticas en un sistema Mamdani de predicción a medio plazo; y (iii) la formulación de la transferencia entre sistemas como morfismos entre retículos difusos en el marco del Análisis Formal de Conceptos Fuzzy [8], conectando este trabajo con la línea de *semántica emergente* desarrollada por los autores.

Agradecimientos. Este trabajo está financiado por el proyecto PID2023 - 147198NB-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades (y fondos FEDER) y la Cátedra US - Google TSI-100930-2023-2, financiada por Google y Ministerio de Asuntos Económicos y Transformación Digital. .

Referencias

1. Miriam Ricci: Bike sharing: A review of evidence on impacts and processes of implementation and operation. Research in Transportation Business & Management, 15:28–38, 2015. Managing the Business of Cycling.
2. Márquez-Saldaña, F., Aranda-Corral, G.A., Borrego-Díaz, J.: Bike sharing systems data interoperability by a unified station status concept and big data solutions. J. Traffic Transp. Eng. **12**(2), 420–433 (2025)
3. Márquez-Saldaña, F., Aranda-Corral, G.A., Borrego-Díaz, J.: Pearclustering: a novel clustering algorithm with an application to bike mobility. Evol. Intell. **18**, art. 73 (2025)
4. Zadeh, L.A.: The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. Inf. Sci. **8**(3), 199–249 (1975)
5. Ruspini, E.H.: A new approach to clustering. Inf. Control **15**(1), 22–32 (1969)
6. Silverman, B.W.: Density Estimation for Statistics and Data Analysis.
7. Bezdek, J.C.: Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms. Plenum Press, New York (1981)
8. Bělohlávek, R.: Concept lattices and order in fuzzy logic. Ann. Pure Appl. Log. **128**(1–3), 277–298 (2004)

Sistema federado de regresión basado en reglas difusas

Markel Crespo-Lamelas[1], Humberto Bustince[1,2][0000−0002−1279−6195], and Asier Urio-Larrea[1,2][0000−0001−7667−5766]

[1] Universidad Pública de Navarra, Pamplona 31006, Navarra
crespo.153999@e.unavarra.es
[2] Institute for Smart Cities (ISC), Universidad Pública de Navarra, Pamplona 31006, Navarra
{bustince,asier.urio}@unavarra.es

Abstract. El aumento de la disponibilidad digital de datos ha provocado una mayor y más efectiva utilización de sistemas de aprendizaje automático en multitud de sectores. Este uso conlleva varios problemas, entre ellos la privacidad de los datos que se utilizan y la capacidad de comprender el funcionamiento interno del sistema. El aprendizaje federado trata el problema de la privacidad mediante la capacidad de combinar modelos aprendidos en distintos nodos sin llegar a compartir los datos, mientras que sistemas como los basados en lógica difusa producen modelos fácilmente comprensibles para el ser humano. Este trabajo propone un método para combinar las bases de reglas de los distintos clientes de un sistema federado basado en reglas difusas para tratar problemas de regresión. Este sistema evita compartir los datos y produce un sistema explicable basado en reglas difusas.

Keywords: Inteligencia Artificial Explicable · Aprendizaje Federado · Lógica Difusa.

1 Introducción

El aumento de la disponibilidad digital de datos ha provocado una mayor y más efectiva utilización de sistemas de aprendizaje automático en multitud de sectores. Este uso conlleva varios problemas, entre ellos la privacidad de los datos que se utilizan[6] y la capacidad de comprender el funcionamiento interno del sistema[3].

El aprendizaje federado propuesto por McMahan [5] busca abordar diferentes problemas, como son la transmisión de grandes volúmenes de datos, la necesidad de requerir gran capacidad de cómputo o la privacidad de los datos. Mediante el aprendizaje de modelos parciales en cada uno de los clientes que participan en la federación, en lugar de enviar todos los datos al punto central solamente se envían los parámetros que aprende el modelo, de esta manera se reduce el volumen de datos a transmitir y se aumenta la privacidad del sistema. Así mismo, cada cliente necesita de una menor capacidad de cómputo al tratar solamente sus datos.

Gran parte del crecimiento de los sistemas de aprendizaje automático se ha dado gracias a las redes neuronales profundas. Estas redes, a pesar de su capacidad de producir buenos resultados, no permiten conocer con facilidad el proceso por el que producen un resultado, por esto se llaman sistemas de caja negra[1]. Estos sistemas no son

adecuados en muchos sectores, como el sanitario o el financiero, sectores en los que se requiere conocer las razones por las que se toma una decisión o se llega a un resultado. Entre los sistemas explicables se encuentran los basados en lógica difusa los cuales producen modelos basados en reglas fácilmente comprensibles para el ser humano[2].

Este trabajo combina los dos conceptos anteriores con el objetivo de producir un sistema federado explicable basado en reglas difusas para tratar problemas de regresión.

2 Sistemas federados difusos

En este trabajo utilizamos el modelo propuesto por Mamdani y Assilian [4]. En estos sistemas, las reglas presentan los antecedentes y consecuentes como conjuntos difusos, de tal forma que siguen la siguiente estructura:

$$R_j: \text{ Si } x_1 \text{ es } A_{j1} \text{ y } \ldots \text{ y } x_n \text{ es } A_{jn} \text{ entonces } y_p \text{ es } B_j$$

Donde R_j es la etiqueta de la regla j-ésima, $A_{j1},\ldots,A_{jn},B_j$ son los conjuntos difusos y $X=(x_1,\ldots,x_n)$ son las variables de entrada.

El aprendizaje federado aplicado a sistemas de lógica difusa presenta una gran diferencia respecto a los enfoques tradicionales basados en redes neuronales. Mientras que en las redes neuronales la agregación consiste en la combinación numérica de pesos (parámetros), en los sistemas basados en reglas difusas el desafío radica en la fusión semántica de bases de conocimientos heterogéneas.

Dado que cada cliente desarrolla sus reglas de forma independiente, el modelo global debe integrar estos conocimientos preservando tanto la coherencia lógica como la interpretabilidad del sistema. En este contexto, la agregación no constituye una simple operación aritmética, sino una fase crítica donde deben resolverse redundancias y contradicciones latentes que, de no ser gestionadas, comprometerían la capacidad explicativa y la fiabilidad del modelo.

3 Metodología

Técnicas de agregación de reglas Para poder tener criterio en las estrategias de agregación, hemos asignado a cada regla un grado de certeza (CF_j) que cuantifica su fiabilidad basada en la evidencia de los datos. Este valor se calcula determinando el grado de activación mínimo de los antecedentes de la regla para cada ejemplo de entrenamiento y seleccionando, posteriormente, el máximo de dichos valores: $CF_j = \max_k(\min_i \mu_{ji}(x_{ik}))$. Este parámetro puede utilizarse en las estrategias de filtrado, ya que permite al servidor tomar decisiones priorizando la regla que cuenta con un mayor respaldo en los datos locales de los clientes.

Para tratar la combinación de bases de reglas, se han implementado y comparado tres estrategias de agregación, diseñadas para depurar y optimizar la base de reglas global:

- **Sin filtrado:** Se mantiene la totalidad de las reglas generadas, sirviendo como escenario de referencia.

- **Eliminación de duplicados y contradicciones:** Se eliminan las reglas duplicadas y las que son contradictorias.
- **Eliminación de duplicados y contradicciones con grado de certeza:** Se eliminan las reglas duplicadas y las que son contradictorias que tienen un menor grado de certeza, conservando las de mayor valor.

Estrategia de evaluación del modelo Evaluaremos el modelo bajo dos perspectivas:

- **Personalizada (FP):** Evalúa el modelo en cada cliente utilizando los datos locales de cada cliente.
- **Global (FG):** Evalúa el modelo frente al conjunto de test global, formado por los conjuntos de test de todos los clientes, midiendo la capacidad de generalización final de todo el sistema federado.

Dataset Para la validación del sistema, se ha utilizado el dataset *Combined Cycle Power Plant*[8,7], orientado a la predicción de la producción neta de energía eléctrica de una central térmica en función de variables ambientales. El conjunto de datos consta de 9.568 mediciones y cuatro variables de entrada.

Métricas de evaluación Para evaluar la calidad predictiva se emplean el coeficiente de determinación (R^2), que mide la bondad de ajuste del modelo, y el error absoluto medio (MAE), que cuantifica la magnitud del error en las unidades de la variable objetivo.

4 Resultados y Conclusiones

Table 1. Resultados por Método de Filtrado: R^2-SCORE y MAE por Modelo

	R^2-SCORE		MAE	
Filtrado	**FP**	**FG**	**FP**	**FG**
sin filtrado	0.3679	0.3707	10.3058	10.3058
Eliminación contradicciones	0.3675	0.3709	11.7311	11.7311
Agregación grado certeza	0.7955	0.7966	7.1201	7.1141

Tal y como se observa en la Tabla 1, la estrategia de agregación es determinante para el rendimiento del sistema. Podemos concluir:

Importancia del grado de certeza: Los resultados evidencian que el rendimiento es peor tanto en el escenario *sin filtrado* como en la *eliminación de duplicidades y contradicciones* simple, lo que sugiere que la depuración indiscriminada de reglas degrada la capacidad predictiva al desechar información valiosa. Frente a esto, la incorporación del grado de certeza permite una mejora en el rendimiento al cuantificar la fiabilidad de cada regla mediante la evidencia en los datos.

Evaluación personalizada y global: La ausencia de diferencias significativas entre los modelos evaluados de forma personalizada (FP) y los evaluados globalmente (FG) puede deberse a que la distribución de los datos de este dataset específico entre los clientes sea homogénea. En este caso, también puede observarse que el sistema no pierde capacidad al generalizar.

Líneas futuras: El trabajo tiene que continuar evaluando más alternativas de agregación y comparando con otros modelos equivalentes del estado del arte. También es necesario el análisis de más datasets con diferentes características de distribución de datos.

Acknowledgments. Este trabajo ha sido posible gracias al proyecto PID2022-136627NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE.

References

1. Adadi, A., Berrada, M.: Peeking inside the black-box: A survey on explainable artificial intelligence (xai). IEEE Access **6**, 52138–52160 (2018). https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2870052
2. Alonso, J.M., Castiello, C., Mencar, C.: Interpretability of fuzzy systems: Current research trends and prospects. Springer handbook of computational intelligence pp. 219–237 (2015)
3. Guidotti, R., Monreale, A., Ruggieri, S., Turini, F., Giannotti, F., Pedreschi, D.: A survey of methods for explaining black box models. ACM computing surveys (CSUR) **51**(5), 1–42 (2018)
4. Mamdani, E.: Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. Proceedings of the Institution of Electrical Engineers **121**(12), 1585 (1974). https://doi.org/10.1049/piee.1974.0328
5. McMahan, B., Moore, E., Ramage, D., Hampson, S., Arcas, B.A.y.: Communication-Efficient Learning of Deep Networks from Decentralized Data. In: Singh, A., Zhu, J. (eds.) Proceedings of the 20th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics. Proceedings of Machine Learning Research, vol. 54, pp. 1273–1282. PMLR (20–22 Apr 2017), https://proceedings.mlr.press/v54/mcmahan17a.html
6. Papernot, N., McDaniel, P., Sinha, A., Wellman, M.P.: Sok: Security and privacy in machine learning. In: 2018 IEEE European symposium on security and privacy (EuroS&P). pp. 399–414. IEEE (2018)
7. Tfekci, P., Kaya, H.: Combined Cycle Power Plant. UCI Machine Learning Repository (2014), DOI: https://doi.org/10.24432/C5002N
8. Tüfekci, P.: Prediction of full load electrical power output of a base load operated combined cycle power plant using machine learning methods. International Journal of Electrical Power & Energy Systems **60**, 126–140 (2014), https://api.semanticscholar.org/CorpusID:111365542

Agregación eficiente de características por caminos en Redes Convolucionales Residuales

Iosu Rodriguez-Martinez[1 [0000−0002−9960−0203]] and Humberto Bustince[1 [0000−0002−1279−6195]]

Universidad Pública de Navarra, Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Pamplona C/Cataluña s/n, 31006 iosu.rodriguez@unavarra.es

Abstract. La fusión de características es un requisito habitual de las redes neuronales modernas, que a menudo requieren reducir características redundantes o combinar múltiples representaciones internas en una sola. En la mayoría de arquitecturas este problema se aborda mediante transformaciones afines entrenables, lo que incrementa su ya elevado número de parámetros. Nuestra hipótesis es que funciones de agregación con pocos parámetros pueden reemplazar estas operaciones de fusión, dando lugar a modelos más ligeros pero igualmente eficaces. En particular, en la arquitectura ResNeXt sustituimos la etapa de fusión de caminos de sus bloques convolucionales por una función de agregación seguida de un operador de convolución ligero como proyección final. Nuestros resultados preliminares indican que esta construcción resulta competitiva en conjuntos de datos de tamaño reducido pese a reducir notablemente el número de parámetros del modelo.

Keywords: Redes Neuronales Convolucionales · Redes multi-rama · Funciones de agregación.

1 Motivación

Las Redes Neuronales Convolucionales (CNNs) siguen siendo una familia dominante en visión artificial, especialmente atractiva en escenarios con recursos limitados gracias a sus sesgos inductivos y su eficiencia. No obstante, el elevado número de parámetros y el consumo de memoria y cómputo de los modelos actuales dificultan su despliegue en *hardware* limitado y restringen su escalabilidad.

Dentro de estas arquitecturas son frecuentes las operaciones de fusión de información. Clásicamente se realizaban mediante funciones sencillas y sin parámetros, como operadores de *pooling* para la reducción espacial o *global average pooling* antes del clasificador final [5]. Con el tiempo, muchas se han sustituido por alternativas parametrizadas (p. ej. convoluciones con *stride* $= 2$ en lugar de capas de *pooling*, o transformaciones afines aprendibles para reducir la dimensionalidad de los mapas de característica. Estos operadores mejoran la precisión a costa de introducir parámetros adicionales en los puntos de fusión de la red.

Un ejemplo representativo es la arquitectura ResNeXt [6], que reformula el bloque residual de ResNet [3] sustituyendo su único camino por k caminos paralelos de menor complejidad, cada uno con un número reducido de canales C_h

(k es la "cardinalidad" del bloque). Los canales de salida de todos los caminos se concatenan y se procesan mediante una última convolución 1×1 hasta los C_o canales deseados, fusionándolos y transformándolos de forma implícita y simultánea (Figura 1.a).

En este trabajo proponemos invertir el orden de las operaciones: agregar primero los k caminos elemento a elemento y aplicar después una única convolución 1×1, reduciendo los parámetros de esa proyección en un factor de k.

En esta propuesta inicial hemos considerado funciones entrenables pero ligeras procedentes de la teoría de la agregación, como las medias ponderadas y los operadores de media ponderada ordenada (*Ordered Weighted Averaging*, OWA) [7]. Nuestra hipótesis es que esta fusión basada en agregación puede recuperar gran parte de la capacidad representacional de la proyección parametrizada con una fracción de su coste. Nuestros resultados preliminares parecen apoyar esta hipótesis al trabajar con conjuntos de datos reducidos.

2 Metodología

2.1 Fusión de caminos basada en agregación

Una unidad *bottleneck* de ResNeXt está compuesta por tres convoluciones: una 1×1 que reduce la entrada a una anchura de $k\cdot C_h$ canales, una 3×3 que procesa los k caminos paralelos de anchura C_h cada uno, y una última 1×1 que fusiona los caminos y los proyecta a C_o canales de salida. Cada convolución va seguida de una capa de *batch normalization* y ReLU, con una conexión residual antes de la activación final. Nuestra modificación afecta a la última convolución 1×1, que combina los k caminos.

Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{C_h \times H \times W}$ las salidas de los caminos. El bloque estándar las combina mediante una única convolución 1×1 $W \in \mathbb{R}^{C_o \times k \cdot C_h}$ sobre los canales concatenados, lo que equivale a una suma de k proyecciones independientes por camino:

$$\mathbf{y} \;=\; W\,[\mathbf{x}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{x}_k] \;=\; \sum_{j=1}^{k} W_j\,\mathbf{x}_j, \tag{1}$$

donde $\oplus$ es la concatenación de canales y $W_j \in \mathbb{R}^{C_o \times C_h}$ es el j-ésimo bloque de W. Esta proyección requiere $k \cdot C_h \cdot C_o$ parámetros. En su lugar, proponemos agregar los caminos elemento a elemento mediante funciones de agregación (a, b) [1] $A : [a, b]^k \to [a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$, a lo largo de la dimensión de cardinalidad, antes de aplicar una única proyección compartida $W' \in \mathbb{R}^{C_o \times C_h}$ (Figura 1.b):

$$\mathbf{y} \;=\; W'\,\mathbf{A}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k), \tag{2}$$

donde $\mathbf{A}$ representa la aplicación elemento a elemento de A por canal y por posición espacial entre los distintos caminos. La proyección requiere ahora $C_h \cdot C_o$ parámetros, una reducción de factor k en esta proyección.

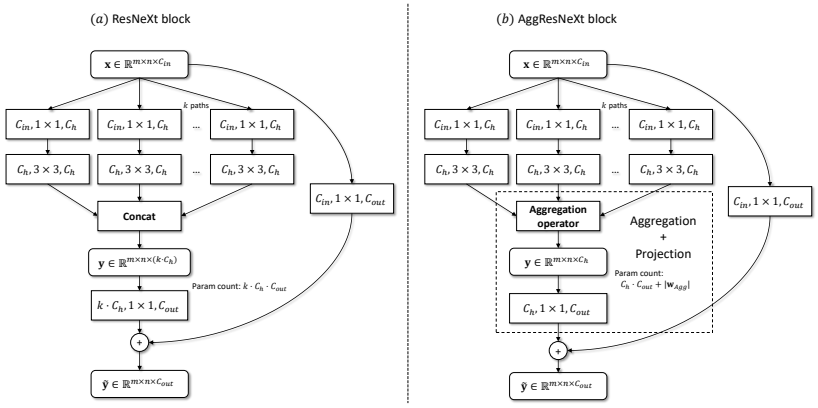


Fig. 1. Bloque ResNeXt (a) frente a nuestro bloque AggResNeXt (b). Sustituimos la convolución 1×1 de fusión por una agregación elemento a elemento sobre los caminos seguida de una proyección de dimensionalidad reducida, lo que reduce los parámetros de fusión en un factor de k.

En este trabajo preliminar hemos estudiado tres funciones de agregación (a, b) para A: la media aritmética $AM(\mathbf{x}) = \frac{1}{k}\sum_i x_i$; una media ponderada $WM(\mathbf{x}) = \sum_i w_i x_i$ ($w_j \geq 0$, $\sum_j w_j = 1$); y un OWA $OWA(\mathbf{x}) = \sum_i w_i x_{\sigma(i)}$, donde $\mathbf{x}_\sigma$ denota la permutación decreciente de $\mathbf{x}$.

2.2 Configuración experimental

Evaluamos nuestra propuesta sobre CIFAR-10, CIFAR-100 [4] y Caltech-101 [2], con particiones 80/20. Las imágenes se redimensionan a 32×32 y, en entrenamiento, aplicamos como *data augmentation* un rellenado con ceros de 4 píxeles, un recorte aleatorio de 32×32 y un volteo horizontal aleatorio.

Todos los modelos comparten un *backbone* reducido de tipo ResNet/ResNeXt para entradas de 32×32: una convolución 3×3 inicial, tres etapas de 3, 4 y 6 unidades *bottleneck* con expansión 4, y una capa de GAP con clasificador lineal. Comparamos **ResNet** (unidades *bottleneck* de un solo camino), **ResNeXt** [6] (cardinalidad 32 y anchuras 4, 8 y 16 en sus tres etapas) y **AggResNeXt**, nuestra propuesta con distintas funciones de agregación (a, b).

Entrenamos 5 ejecuciones independientes por combinación de modelo y conjunto de datos, y reportamos la precisión en test como media ± desviación típica. Optimizamos mediante Descenso de Gradiente Estocástico durante 90 épocas, con la tasa de aprendizaje reducida por *Cosine Annealing* desde 0.0001 hasta 0.

3 Resultados parciales

La Tabla 1 recoge la tasa de acierto media en test. Pese a usar un 43% menos de parámetros, las variantes basadas en agregación se mantienen competitivas

Table 1. Tasa de acierto media en test (± desviación típica) en los distintos conjuntos de datos.

Modelo	CIFAR10	CIFAR100	CALTECH101
ResNet	0.9247 ± 0.0071	0.7323 ± 0.0057	0.5877 ± 0.0304
ResNeXt	0.9378 ± 0.0024	0.7379 ± 0.0126	0.6455 ± 0.0190
AM	0.9246 ± 0.0035	0.6958 ± 0.0067	0.6217 ± 0.0297
WM	0.9233 ± 0.0017	0.6905 ± 0.0053	0.6535 ± 0.0194
OWA	0.9202 ± 0.0025	0.6924 ± 0.0050	0.6590 ± 0.0186

frente a ResNeXt en el conjunto más sencillo, CIFAR-10, y superan claramente a ResNet en Caltech-101, donde los operadores entrenables (media ponderada y OWA) igualan a ResNeXt. En CIFAR-100, el más difícil, nuestra propuesta resulta menos favorable, unos pocos puntos por debajo de ambas líneas base.

De ello extraemos dos conclusiones. Primero, el coste de la reducción de parámetros crece con la dificultad de la tarea. Segundo, en el régimen de pocos datos de Caltech-101 la agregación resulta ventajosa, lo que sugiere un beneficio frente al *overfitting*. Estas observaciones respaldan nuestra hipótesis y motivan un estudio futuro sobre otras cardinalidades y funciones de agregación.

Acknowledgments. Este estudio ha sido financiado por el proyecto PID2022-136627NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE.

Disclosure of Interests. Los autores declaran no tener intereses en competencia que sean relevantes para el contenido de este artículo.

References

1. da Cruz Asmus, T., Dimuro, G.P., Bedregal, B., Sanz, J.A., Fernandez, J., Rodriguez-Martinez, I., Mesiar, R., Bustince, H.: A constructive framework to define fusion functions with floating domains in arbitrary closed real intervals. Information Sciences **610**, 800–829 (2022)
2. Fei-Fei, L., Fergus, R., Perona, P.: Learning generative visual models from few training examples... In: CVPR 2004 (2004)
3. He, K., Zhang, X., Ren, S., Sun, J.: Deep residual learning for image recognition. In: Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition. pp. 770–778 (2016)
4. Krizhevsky, A., Hinton, G., et al.: Learning multiple layers of features from tiny images (2009)
5. Lin, M., Chen, Q., Yan, S.: Network in network. In: 2nd International Conference on Learning Representations, ICLR 2014, Banff, AB, Canada, April 14-16, 2014, Conference Track Proceedings (2014), https://arxiv.org/abs/1312.4400
6. Xie, S., Girshick, R., Dollár, P., Tu, Z., He, K.: Aggregated residual transformations for deep neural networks. In: Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition. pp. 1492–1500 (2017)
7. Yager, R.R.: On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics **18**(1), 183–190 (1988)

Análisis de Brechas Explicable y Mínimo Esfuerzo Psicológico para Alcanzar Consenso en Toma de Decisiones

Cristina Zuheros[1] and Francisco Herrera[1,2]

[1] Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
[2] Instituto Andaluz de Data Science and Computational Intelligence (DaSCI)
Universidad de Granada, España
czuheros@ugr.es, herrera@decsai.ugr.es

Abstract. En ese artículo se propone *MPEGAS*, un *framework* para fomentar el consenso en la toma de decisiones multi-criterio lingüística. El *framework* unifica evaluaciones con formatos heterogéneos, identifica discrepancias entre expertos y genera peticiones de cambio en lenguaje natural. Un caso de estudio muestra cómo MPEGAS mejora progresivamente el consenso grupal minimizando el esfuerzo de los expertos.

Keywords: Toma de Decisiones en Grupo · Proceso de Alcance del Consenso · IA Explicable · Semánticas Individuales Personalizadas

1 Introducción

Los procesos de toma de decisiones en grupo (*Group Decision Making*, GDM) en entornos multi-criterio requieren mecanismos capaces de alinear las posturas de los expertos y alcanzar un consenso representativo [1]. Cuando los expertos expresan sus evaluaciones mediante información lingüística, la interpretación puede variar según su nivel de experiencia e incertidumbre y su rol profesional. Aunque los modelos basados en semánticas individuales personalizadas (PIS) permiten unificar información heterogénea [3], todavía persisten limitaciones en el proceso de consenso. Este artículo aborda los siguientes desafíos clave en GDM:

1. Heterogeneidad cognitiva y profesional: los expertos pueden emplear distintos formatos de evaluación lingüística y asignar diferente importancia a los criterios según su perfil, lo que dificulta la agregación de sus evaluaciones.
2. Falta de explicabilidad natural: las discrepancias entre evaluaciones individuales y colectivas deben traducirse en argumentos comprensibles que justifiquen las recomendaciones de cambio y fomenten el consenso [4].
3. Resistencia psicológica al cambio: las recomendaciones de ajuste pueden ser rechazadas si afectan a criterios considerados relevantes por el experto o si el experto desconoce el efecto de sus evaluaciones frente al grupo.

Este artículo aborda los desafíos indicados proponiendo el marco de trabajo o *framework MPEGAS* (*Minimized Psychological Effort via Gap-Analysis Semantic Group Decision Making*). Dicho *framework* se presenta en la Sección 2 y se aplica a un problema de GDM multi-criterio lingüístico en la Sección 3.

2 Metodología propuesta

MPEGAS es un *framework* diseñado para fomentar el consenso en GDM multicriterio lingüístico, que identifica las discrepancias más relevantes entre expertos y genera peticiones de ajuste explicables que fomentan el acuerdo con el mínimo esfuerzo psicológico posible. Está compuesto por tres fases fundamentales: 1) módulo unificador de evaluaciones lingüísticas heterogéneas y pesos de criterios subjetivos, 2) motor analítico de explicabilidad basado en análisis de brechas, 3) mecanismo de realimentación orientado al mínimo esfuerzo psicológico.

2.1 Módulo Unificador de Evaluaciones y Criterios Subjetivos

Esta fase tiene por objetivo resolver dos principales fuentes de heterogeneidad: la variabilidad en los formatos de representación de las evaluaciones lingüísticas por parte de los expertos (derivada de su nivel de experiencia e incertidumbre) y la discrepancia en la importancia que cada experto otorga a los criterios de evaluación (derivada de su perfil o rol profesional).

Sea un conjunto de expertos $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, criterios $C = \{c_1, \ldots, c_q\}$ y un conjunto de términos lingüísticos $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ para la evaluación. Se permite evaluar mediante etiquetas lingüísticas simples, de intervalo o distribuidas. Cada e_k establece un vector de pesos sobre los criterios, $W^k = (w_{k1}, \ldots, w_{kq})$ tal que $\sum_{j=1}^{q} w_{kj} = 1$, que captura el sesgo de su rol (*p. ej.*, un perfil financiero priorizará criterios de costes frente a los de seguridad).

Las evaluaciones heterogéneas se unifican basándose en el modelo PIS [3]. Mediante una función de escala numérica adaptada a cada formato de evaluación, se construye para cada experto e_k una matriz $P^k = \left(p_{ij}^k\right)_{n\times q}$, donde $p_{ij}^k \in [0,1]$ representa la evaluación numérica de la alternativa x_i bajo el criterio c_j. Se calcula la matriz colectiva $P^c = (p_{ij}^c)_{n\times q}$ mediante la media ponderada de las preferencias individuales y el peso de cada experto α_k siendo $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$.

Se modela el esfuerzo psicológico que supone el cambio en la evaluación de un criterio c_j para un experto e_k definiendo el *índice de resistencia al cambio* $IRC = (irc_{kj})_{m\times q}$. Inspirados por la Teoría de las Perspectivas [2], el *framework* reconoce que la resistencia psicológica es asimétrica: un experto tiene mayor aversión a perder influencia sobre un criterio frente a ganarla. Este comportamiento se modela mediante una función por tramos en base a W^k y los pesos colectivos. Finalmente, este índice se proyecta mediante una función exponencial en un matriz de *disposición al cambio*, $DC = (dc_{kj})_{m\times q}$, donde valores cercanos a 1 identifican los criterios de menor coste psicológico de cambio para cada experto.

2.2 Motor Analítico de Explicabilidad

Esta fase tiene por objetivo evaluar la cohesión del grupo y diagnosticar la raíz fundamental de las discrepancias mediante el análisis de brechas.

Se construye una matriz de *brechas individuales* $B^k = \left(b_{ij}^k\right)_{n\times q}$ siendo $b_{ij}^k = p_{ij}^k - p_{ij}^c$, para cada experto, donde el valor $|b_{ij}^k| \in [0,1]$ mide el desacuerdo y

su signo determina la dirección de la desviación. Seguidamente, se establece el *índice de consenso del grupo* $CI^G \in [0,1]$ mediante la media ponderada, del complemento de la distancia media de las brechas de los expertos, en base a los pesos de los expertos. Si el consenso del grupo no alcanza un umbral establecido ($CI^G < \gamma \in [0,1]$) es necesario modificar alguna evaluación de los expertos. En ese caso, el *framework* identifica automáticamente los cambios más viables. Para ello, genera la matriz de *oportunidad de consenso* para cada experto, $OC^k = \left(oc_{ij}^k\right)_{n\times q}$, siendo $oc_{ij}^k = |b_{ij}^k| \cdot dc_{kj}$. Este índice prioriza aquellos elementos de evaluación con amplio margen de mejora y con alta disposición al cambio.

2.3 Mecanismo de Realimentación

Esta fase tiene por objetivo generar recomendaciones de cambio personalizadas y argumentadas en lenguaje natural cuando el consenso colectivo es insuficiente.

El *framework* identifica la tripleta experto-alternativa-criterio que maximiza el consenso a la vez que requiere el menor esfuerzo psicológico de cambio mediante $(e_{k^*}, x_{i^*}, c_{j^*}) = \arg\max_{(k,i,j)} \left(oc_{ij}^k\right)$. A continuación, se traducen los factores analíticos de cambio en una propuesta lingüística fácilmente comprensible para el experto seleccionado. Aprovechando la retranslación en el modelo PIS, el *framework* calcula la etiqueta óptima $s^* \in S$ que minimiza la distancia semántica con el valor colectivo $p_{i^*j^*}^c$. Finalmente, esta etiqueta se integra en un mensaje explicativo mediante reglas de inferencia que evalúan el signo de la brecha y el índice de resistencia al cambio del experto.

Este enfoque garantiza que los expertos modifiquen voluntariamente evaluaciones que consideran menos significativas, reduciendo sus resistencias psicológicas al cambio y acelerando la convergencia del proceso.

3 Caso de estudio

Para ilustrar el potencial del *framework* MPEGAS, se resuelve un problema GDM con tres expertos, tres alternativas, tres criterios y el conjunto de términos lingüísticos $S = \{s_0 = \text{Muy Bajo}, s_1 = \text{Bajo}, s_2 = \text{Medio}, s_3 = \text{Alto}, s_4 = \text{Muy Alto}\}$. Las evaluaciones de los expertos se muestran en la Figura 1. Además, los expertos establecen $W_1 = (0.40, 0.10, 0.50)$, $W_2 = (0.30, 0.30, 0.40)$ y $W_3 = (0.30, 0.50, 0.20)$. El umbral de consenso necesario establecido es $\gamma = 0.93$.

e_1	c_1	c_2	c_3
x_1	s_3	s_2	s_1
x_2	s_2	s_0	s_2
x_3	s_2	s_3	s_2

e_2	c_1	c_2	c_3
x_1	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_2]$	$[s_1, s_1]$
x_2	$[s_3, s_3]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_2]$
x_3	$[s_2, s_2]$	$[s_2, s_2]$	$[s_1, s_3]$

e_3	c_1	c_2	c_3
x_1	$(s_2, 0.2), (s_3, 0.8)$	$(s_1, 0.2), (s_2, 0.8)$	$(s_2, 0.2), (s_3, 0.8)$
x_2	$(s_3, 0.7), (s_4, 0.3)$	$(s_2, 0.9), (s_3, 0.1)$	$(s_2, 0.8), (s_3, 0.2)$
x_3	$(s_1, 0.2), (s_2, 0.8)$	$(s_2, 1.0)$	$(s_2, 0.7), (s_3, 0.3)$

Fig. 1. Matrices de evaluación proporcionadas por los expertos.

El framework genera tres rondas iterativas para alcanzar el consenso deseado. En la primera, $CI_{\mathrm{G}} = 0.912$ y se identifica la máxima oportunidad de consenso en el experto e_1. En la segunda ronda, $CI_{\mathrm{G}} = 0.929$ y se identifica la oportunidad de consenso en e_3. MPEGAS emite peticiones explicativas de cambio como se muestra en la Figura 2. Tras aceptar ambos expertos el cambio, en la tercera ronda se alcanza el consenso deseado ya que $CI_{\mathrm{G}} = 0.943$. Se da por concluido el proceso y se genera el *ranking* final de las alternativas $X_2 > X_3 > X_1$.

Ronda 1: Retroalimentación para e_1

Estimado experto e_1, le sugerimos aumentar su evaluación para la alternativa x_2 bajo el criterio c_2, aproximándose a s_1 (Bajo). Tu evaluación actual es s_0 (Muy Bajo).

Motivo: Se ha realizado un balance entre discrepancia de los expertos y menor impacto en su perfil. Usted es el candidato óptimo:

1) Discrepancia: su desviación respecto a la tendencia colectiva es 0.34, frente a 0.17 en media del resto de expertos.
2) Impacto personal: para su perfil, el criterio c_2 tiene peso 0.10, frente a 0.40 de relevancia media para el resto.

Al fusionar ambos factores, modificar su postura es la acción que menos esfuerzo psicológico genera en todo el grupo y la que más favorece el proceso de decisión.

Ventajas del cambio:

– Consenso grupal actual: 0.912.
– Incremento del consenso: 1.216%.

Ronda 2: Retroalimentación para e_3

Estimado experto e_3, le sugerimos disminuir su evaluación para la alternativa x_1 bajo el criterio c_3, aproximándose a s_2 (Medio). Tu evaluación actual es $(s_2, 0.2)$ y $(s_3, 0.8)$.

Motivo: Se ha realizado un balance entre discrepancia de los expertos y menor impacto en su perfil. Usted es el candidato óptimo:

1) Discrepancia: su desviación respecto a la tendencia colectiva es 0.30, frente a 0.15 en media del resto de expertos.
2) Impacto personal: para su perfil, el criterio c_3 tiene peso 0.20, frente a 0.45 de relevancia media para el resto.

Al fusionar ambos factores, modificar su postura es la acción que menos esfuerzo psicológico genera en todo el grupo y la que más favorece el proceso de decisión.

Ventajas del cambio:

– Consenso grupal actual: 0.929.
– Incremento del consenso: 1.081%.

Fig. 2. Mensajes explicativos generados por MPEGAS y enviados a los expertos.

Agradecimientos. Esta investigación es parte del Proyecto TSI-100927-2023-1, financiado por Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia Europeo, de la Unión Europea-Next Generation EU a través del Ministerio para la Transformación Digital y de la Función Pública y está parcialmente financiada por el Ministerio de Ciencia y Tecnología de España en el marco del proyecto PID2023-150070NB-I00, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE. Los autores declaran que no existen conflictos de interés.

Bibliografía

1. Guo, J., Zhang, Z., Wang, Z.: A personalised consensus-reaching process for group decision-making under dynamic trust networks. Group Decision and Negotiation **35**(1), 5 (2026)
2. Kahneman, D., Tversky, A.: Prospect theory: An analysis of decision under risk. In: Handbook of the fundamentals of financial decision making: Part I, pp. 99–127. World Scientific (2013)
3. Li, C.C., Dong, Y., Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Martínez, L.: Personalized individual semantics in computing with words for supporting linguistic group decision making. an application on consensus reaching. Information Fusion **33**, 29–40 (2017)
4. Xu, M., Wang, Y.: Explainability increases trust resilience in intelligent agents. British Journal of Psychology **117**(2), 528–547 (2026)

Índice de Autores

Alba Lirón-León, 37
Alejandro López-Hernández, 45
Alejandro Mus, 60
Antonio Francisco Roldán López de Hierro, 33
Antonio P. Albín-Rodríguez, 9, 13
Arnau Mir, 60
Asier Urío Larrea, 72

Boris Pérez-Cañedo, 21

Carlos Fernández-Basso, 9
Carlos Montoya Peña, 9
Carmen Martínez-Cruz, 13
Celia Cordovilla-Sánchez, 49
Christopher Nugent, 5
Clara Simón De Blas, 53
Cristina Zuheros, 80
Cédric Marco-Detchart, 1

Daniel Gómez, 37, 41
DanielGómez González, 53
David Muñoz-Valero, 45, 64
Diego García-Zamora, 33

Eduardo René Concepción-Morales, 21
Enrique Adrian Villarrubia-Martin, 64
Estrella Garcia Pelluz, 56
Eusebio Angulo Sánchez-Herrera, 45

Francisco A. Márquez, 68
Francisco Herrera, 80
Francisco J. Márquez-Saldaña, 68
Francisco Javier Fernández, 1, 33
Francisco José Ocaña Alcázar, 25

Gabriel Viscarret Atienza, 1
Gonzalo A. Aranda-Corral, 68
Graçaliz Dimuro, 33

Humberto Bustince, 1, 29, 33, 72, 76

Inmaculada Gutiérrez, 37
Iosu Rodriguez-Martinez, 76

J. Tinguaro Rodríguez, 37
James Keller, 13
Javier Montero, 33
Jesús González Gironda, 53
Jesús Medina, 25, 49
Joaquin Arellano, 17
Joaquín Borrego-Díaz, 68
José Luis López Ruiz, 5, 9, 13
José Luis Verdegay, 21
Juan Baz, 29
Juan F. Gaitán-Guerrero, 9, 13
Juan Moreno-García, 45, 64
Juan Vicente Riera, 60
Julio Alberto López-Gómez, 64

Laura De Miguel, 33
Luis Jimenez-Linares, 64
Luis Magdalena, 41

Macarena Espinilla Estévez, 5, 9, 13
Manuel González-Hidalgo, 60
Maria Eugenia Cornejo Piñero, 25
Markel Cresop Lamelas, 72
Mihail Popescu, 13
Mikel Ferrero-Jaurrieta, 29

Noelia Rico, 29

Pablo Flores-Vidal, 41
Pascual Jara, 49

Raluca Iulia Cozma Mircescu, 1
Regivan Santiago, 33
Roberto G. Aragón, 49

Susana Montes, 33