Sobre la admisibilidad del preorden basado en el centroide de números difusos

Diego García-Zamora[1][0000−0002−0843−4714], Antonio Francisco Roldán López de Hierro[2][0000−0002−6956−4328], and Humberto Bustince[3][0000−0002−1279−6195]

[1] Department of Mathematics, Universidad de Jaén, Jaén, Spain dgzamora@ujaen.es
[2] Department of Statistics and Operations Research, University of Granada, Granada, Spain aroldan@ugr.es
[3] Statistics, Computer Science and Mathematics Dept., Public University of Navarre, Pamplona, Spain bustince@unavarra.es

Resumen La ordenación de números difusos constituye un pilar fundamental en los procesos de toma de decisiones bajo incertidumbre. Entre las técnicas de defuzzificación más extendidas se encuentra el método del centroide, el cual asigna un valor crisp representativo a cada número difuso, induciendo así un preorden total. Sin embargo, este método presenta limitaciones teóricas, principalmente la falta de antisimetría, lo que ha impulsado el estudio de los órdenes admisibles como refinamientos del orden parcial de Klir-Yuan. En este trabajo, analizamos la admisibilidad del preorden basado en el centroide. En primer lugar, nos inspiramos en integrales de Riemann y Lebesgue para deducir dos fórmulas generales para calcularlo. En segundo lugar, proponemos un contraejemplo que prueba que el centroide no es, en términos generales, un orden admisible, ni siquiera en el espacio de los números difusos continuos. Finalmente, demostramos formalmente que el centroide induce un preorden admisible en la familia de los números difusos trapezoidales, y extendemos estos hallazgos a los conjuntos difusos intervalares de tipo 2.

Keywords: Números difusos · Centroide · Órdenes admisibles · Números difusos trapezoidales.

1. Introducción

Este artículo resume el estudio de la admisibilidad del centroide en diferentes familias de conjuntos difusos realizado en [1].

El centroide de un número difuso representa su centro de gravedad y se utiliza frecuentemente para convertir información difusa en valores crisp [1]. Un reto natural consiste en determinar si este método respeta el orden parcial natural de Klir-Yuan [2], el cual motivó la definición de los órdenes admisibles [3].

2. Preliminares

Decimos que un preorden para números difusos es *admisible* si es un preorden (relación binaria reflexiva y transitiva) total que refina el orden de Klir-Yuan ($\leq_{KY}$), donde $A \leq_{KY} B$ si se cumple $A_\alpha^- \leq B_\alpha^-$ y $A_\alpha^+ \leq B_\alpha^+$ para todo $\alpha \in]0,1]$.

Definition 1 (Area). *Dado un número difuso* $A \in \mathrm{FN}(\mathbb{R})$*, el* area bajo el mismo *se define mediante:*

$$S(A) = \int_{\mathbb{R}} A(x)dx = \int_{A_0^-}^{A_0^+} A(x)dx.$$

Notemos que si $A \in \mathrm{FN}(\mathbb{R})$ cumple $S(A) = 0$, entonces A es necesariamente un número crisp. En tal caso A se identifica con el número crisp $a \in \mathbb{R}$ que cumple $A(x) = 1 \iff x = a$.

Definition 2 (Centroide). *Dado un número difuso* $A \in \mathrm{FN}(\mathbb{R})$*, su* centroide *se define por:*

$$g(A) = \begin{cases} a, & \text{if } S(A) = 0, \\ \dfrac{\int_{A_0^-}^{A_0^+} xA(x)dx}{\int_{A_0^-}^{A_0^+} A(x)dx}, & \text{if } S(A) \neq 0. \end{cases}$$

El centroide determina el siguiente preorden:

Definition 3 (Centroid preorder). *Dados* $A, B \in \mathrm{FN}(\mathbb{R})$*,* $A \leq_g B$ *cuando* $g(A) \leq g(B)$*.*

3. Resultados de Admisibilidad

3.1. Dos interpretaciones del centroide basadas en las integrales de Riemann y de Lebesgue

La interpretación de Riemann define el centroide $g(A)$ de un número difuso A como el límite de una suma ponderada basada en una partición del soporte $[a, b] = A_0$. Matemáticamente, se expresa como:

$$g(A) = a + (b - a) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{A(x_k^n)}{\sum_{j=1}^{n} A(x_j^n)}$$

donde $x_k^n = a+(b-a)\frac{k}{n}$ para $k = 0, 1, ..., n$ representa los puntos de la partición en el intervalo del soporte. Esta fórmula es una consecuencia directa de la definición de la integral de Riemann aplicada a las funciones de pertenencia acotadas que definen el número difuso. Esta expresión garantiza que el valor del centroide siempre se encuentra contenido dentro del soporte del número difuso, y permite expresar el centroide como el valor esperado del número difuso, proporcionando una base sólida para su uso como representante crisp del conjunto.

A diferencia de la visión de Riemann, la interpretación de Lebesgue utiliza los α-cortes del número difuso para expresar el centroide como el límite de una razón de sumas ponderadas. Matemáticamente, si consideramos una partición

del intervalo de niveles de pertenencia $\alpha \in [0,1]$, el centroide $g(A)$ viene dado por:

$$g(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} g(A_{n,k}) S(A_{n,k})}{\sum_{k=1}^{n-1} S(A_{n,k})}$$

donde:$A_{n,k}$ representa el α-corte del número difuso en el nivel α_k^n, $g(A_{n,k})$ es el punto medio del intervalo que forma dicho α-corte, y $S(A_{n,k})$ es la longitud de ese intervalo específico. Esta formulación basada en la teoría de la medida de Lebesgue permite extraer conclusiones fundamentales. En primer lugar, permite interpretar el centroide no solo como un centro de masa geométrico, sino específicamente como el promedio de los puntos medios de todos sus α-cortes, ponderados por la amplitud de cada uno. Esta visión premite justificar los métodos prácticos de defuzzificación que se centran en el análisis de niveles de corte. Además, esta interpretación facilita la construcción de contraejemplos. Al ver el centroide como un promedio de puntos medios, se hace evidente que variaciones drásticas en la forma de las funciones de pertenencia (aunque respeten el orden de Klir-Yuan) pueden desplazar el "peso"del promedio de forma que se viole la admisibilidad.

3.2. Inadmisibilidad en el Caso General

Mediante una interpretación lebesguiana, el centroide puede verse como un promedio ponderado de los puntos medios de los α-cortes [1]. Utilizando esta propiedad, aportamos un contraejemplo con dos números continuos A y B tales que $A \leq_{KY} B$ pero $g(A) > g(B)$ (específicamente 2/3 frente a $\approx$ 0,624) [1]. Concretamente, podemos considerar A y B definidos como sigue (ver Fig. 1):

$$A(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

$$B(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \leq x \leq 0{,}2 \\ 0{,}2 & \text{if } 0{,}2 \leq x \leq 0{,}9 \\ 8x - 7 & \text{if } 0{,}9 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

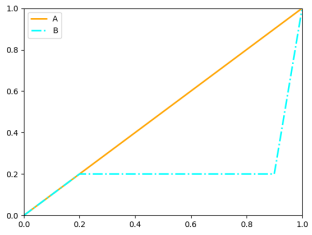


Figura 1. Ejemplo de la no admisibilidad del preorden basado en el centroide

Esto prueba que el centroide no es admisible para la familia general de números difusos continuos.

3.3. Admisibilidad en TFNs e IT2FS

Para un número difuso trapezoidal $T(a, b, c, d)$, el centroide se reduce a la expresión analítica:

$$g(T) = \frac{1}{3}\left(a + b + c + d + \frac{ab - cd}{c + d - a - b}\right)$$

Teorema: El centroide determina un preorden admisible sobre la familia de números difusos trapezoidales. La prueba se basa en demostrar que $g(T)$ es monótona creciente respecto a cada uno de sus parámetros (a, b, c, d) [1]. Este resultado se extiende a conjuntos difusos de tipo 2 de intervalo (IT2FS) con membresías trapezoidales, utilizando órdenes admisibles para intervalos.

4. Conclusiones

El centroide es una herramienta robusta de ordenación para TFNs e IT2FS al ser admisible en estas familias, aunque no sea generalizable a todos los números difusos continuos [1]. Estos hallazgos validan su uso en sistemas de control y toma de decisiones basados en modelos trapezoidales.

Acknowledgments. Los autores expresan su agradecimiento a su universidad. Este trabajo forma parte del proyecto I+D+i C-EXP-153-UGR23, financiado por la Consejería de Universidad, Investigación e Innovación de la Junta de Andalucía y por la Unión Europea a través del Programa FEDER Andalucía 2021-2027, así como por el proyecto de investigación PID2022-136627NB-I00 (MCIN/AEI/10.13039/5011 00011033/FEDER, UE).

Disclosure of Interests. Los autores no tienen ningún conflicto de intereses.

Referencias

1. García-Zamora, D., Hierro, A.F.R.L.d., Bustince, H.: A note on the admissibility of the centroid-based preorder for fuzzy numbers. Computational and Applied Mathematics **45**(4) (Dec 2025). https://doi.org/10.1007/s40314-025-03500-8
2. Klir, G.J., Yuan, B.: Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and applications. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall (1995)
3. Zumelzu, N., Bedregal, B., Mansilla, E., Bustince, H., Díaz, R.: Admissible orders on fuzzy numbers. IEEE Transactions on Fuzzy Systems **30**(11), 4788–4799 (2022)