Monotonía en Sistemas de Inferencia Fundamentados en la f-inclusión

Carolina Díaz-Montarroso[1,2], Nicolás Madrid[3], y Jorge Elorza[1,2]

[1] Dpto. de Física y Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad de Navarra, C. Irunlarrea 1, 31008 Pamplona
[2] Instituto de Ciencia de los Datos e Inteligencia Artificial (DATAI), Universidad de Navarra, Edificio Ismael Sánchez Bella, Campus Universitario, 31009 Pamplona
{cdiazmontar, jelorza}@unav.es
[3] Dpto. de Matemáticas, Universidad de Cádiz, C. República Saharaoui, 11510 Puerto Real
nicolas.madrid@uca.es

Resumen Este artículo se centra en los sistemas de inferencia difusos basados en la f-inclusión, que es un operador que mide la inclusión entre conjuntos difusos a través de una aplicación en el intervalo unidad. El objetivo principal de este artículo es el estudio de la propiedad de monotonía, desde una perspectiva lógica, de dicho sistema.

Palabras clave: Sistemas de inferencia difusos · f-índice de inclusión · Conexiones de Galois · Medidas de inclusión

1. Introducción

Los sistemas que hacen uso de reglas difusas para realizar inferencias son una herramienta comúnmente usada en el ámbito del razonamiento aproximado. Estos sistemas se emplean en áreas de la ciencia y la ingeniería en las que es habitual que la información esté sujeta a incertidumbre o vaguedad, y se utilizan para tareas de diagnóstico, predicción o clasificación [2,7].

En trabajos previos se ha demostrado la validez del operador de f-inclusión para modelizar un Modus Ponens Generalizado (GMP, por sus siglas en inglés) [4]. Esta regla de inferencia suele emplearse como motor de inferencia en los Sistemas de Inferencia Difusos (FIS) [1]. Más adelante, en [5] se introduce la estructura de un sistema de inferencia basado en este operador. Este nuevo FIS destaca por estar fundamentado en una Lógica Descriptiva, la cual emplea la inclusión como elemento central en los procesos de inferencia [17].

Los FIS basados en la f-inclusión presentan similaridades con los llamados Sistemas de Inferencia Relacionales (RIS), los cuales hacen uso de la Regla Composicional de Inferencia (CRI) para generar salidas. Un ejemplo conocido de RIS es el propuesto por Mamdani [13], pero existen muchos otros trabajos en la bibliografía sobre estos sistemas [3,15]. La principal diferencia que presenta nuestro sistema con los RIS consiste en el uso de la f-inclusión en lugar de la CRI para modelar el motor de inferencia. No obstante, en [9] se estudia la relación entre

este primer operador con los pares residuados, a través de los cuales suele modelarse la regla composicional de inferencia [14,18], estableciendo una conexión entre esta regla y la f-inclusión.

El propósito de este trabajo consiste en extender el estudio, ya iniciado en [5], de las propiedades del FIS basado en la f-inclusión desde el punto de vista de los sistemas lógico formales. En concreto, se estudia la propiedad de monotonía del sistema, que garantiza la preservación de las consecuencias al incluir información nueva en la base de reglas que lo compone.

A continuación, se presenta la estructura del trabajo. En la Sección 2, recordamos el conjunto de aplicaciones que actúan como índices de inclusión e introducimos la estructura de un sistema de inferencia difuso basado en la f-inclusión. En la Sección 3, introducimos el conjunto de consecuencias en nuestro FIS y proporcionamos algunas propiedades sobre su estructura. Posteriormente, presentamos resultados novedosos sobre el comportamiento del conjunto de consecuencias bajo modificaciones de las condiciones iniciales. Finalmente, en la Sección 4 presentamos las conclusiones de este trabajo y algunos trabajos futuros.

2. Sistemas de Inferencia Difusos Basados en la f-inclusión

Un sistema de inferencia difuso es un mecanismo que permite obtener información nueva en un entorno de incertidumbre a partir de una serie de reglas y de unos datos de entrada. A pesar de las diferencias existentes entre los diversos FIS presentados en la literatura, todos poseen una estructura común que se puede dividir en cuatro pasos.

- En primer lugar, se toman los datos de entrada y, mediante un proceso de *fuzzificación*, se transforman en un conjunto difuso. Generalmente, este proceso utiliza particiones difusas sobre el conjunto de datos de entrada.
- Por otro lado, el sistema posee una *base de conocimiento* compuesta por una serie de reglas difusas, las cuales condensan información proporcionada previamente por un conjunto de expertos.
- En tercer lugar, el *motor de inferencia* hace uso de las reglas de la base de conocimiento y de la entrada *fuzzificada* para obtener un conjunto difuso de salida.
- Por último, se puede aplicar un proceso opcional de *defuzzificación* que transforma el conjunto difuso de salida en un dato interpretable.

En esta sección se presenta el marco en el que se desarrollan los sistemas de inferencia difusos basados en la f-inclusión, así como la base de conocimiento y el motor de inferencia del sistema. Los procesos de *fuzzificación* y *defuzzificación* se omiten en este artículo, dado que están sujetos al contexto práctico en el que se hace uso del FIS.

2.1. f-inclusión entre Conjuntos Difusos

Antes de comenzar con la introducción del sistema, definiremos el concepto principal en torno al cual se desarrolla: la noción de f-inclusión. Este concepto es la base de las reglas difusas que componen la base de conocimiento.

El concepto de f-inclusión aparece por primera vez en [11] con el objetivo de generalizar el concepto de inclusión en el ambiente difuso. Este se diferencia de otras medidas de inclusión en que no representa esta noción a través de un único valor en el intervalo unidad $[0,1]$, sino mediante una aplicación definida de $[0,1]$ en $[0,1]$.

En este trabajo, consideraremos funciones monótonas que formen parte de una conexión de Galois y que sean deflaccionarias. Comencemos recordando el concepto de conexión de Galois.

Definición 1 ([6]). *Sean $f, \overline{f}\colon [0,1] \to [0,1]$ dos funciones. Se dice que $(f, \overline{f})$ forma una* conexión de Galois *si cumple la siguiente relación para todo $a, b \in [0,1]$:*

$$f(a) \leq b \quad \text{si y solo si} \quad a \leq \overline{f}(b).$$

En la siguiente definición concretamos el conjunto de funciones que vamos a considerar para representar la inclusión entre conjuntos difusos.

Definición 2 ([11]). *Se define* conjunto de índices de inclusión*, denotado por $\mathscr{G}$, como el conjunto de funciones $f\colon [0,1] \to [0,1]$ satisfaciendo:*

- *Monotonía creciente: $f(a) \leq f(b)$ para todo $a, b \in [0,1]$ tales que $a \leq b$.*
- *Deflación: $f(a) \leq a$ para todo $a \in [0,1]$.*
- *Continuidad a la izquierda: $f\left(\bigvee A\right) = \bigvee_{a \in A} f(a)$ para todo $A \subseteq [0,1]$.*

Observación. Dado un índice de inclusión $f \in \mathscr{G}$, siempre existe una aplicación $\overline{f}\colon [0,1] \to [0,1]$ tal que $(f, \overline{f})$ es una conexión de Galois (ver [6]).

En [10] se demuestra que el conjunto $\mathscr{G}$ posee estructura de retículo completo, cuyo supremo coincide con el supremo usual de funciones, y que tiene los siguientes elementos máximo y mínimo, respectivamente:

- $\mathrm{id}(a) = a$ para todo $a \in [0,1]$;
- $\mathbf{0}(a) = 0$ para todo $a \in [0,1]$.

A continuación, se introduce la noción de f-inclusión restringida a $\mathscr{G}$[4].

Definición 3 ([9]). *Sean A, B dos conjuntos difusos sobre un universo $\mathcal{U}$ y sea $f \in \mathscr{G}$. Decimos que A* está f-incluido en B*, denotado por $A \subseteq_f B$, si*

$$f(A(u)) \leq B(u)$$

para todo $u \in \mathcal{U}$. Definimos el f-índice de inclusión restringido a $\mathscr{G}$ de A en B*, denotado por $\mathrm{Inc}_{\mathscr{G}}(A, B)$, como*

$$\mathrm{Inc}_{\mathscr{G}}(A, B) = \sup\left\{f \in \mathscr{G} \mid A \subseteq_f B\right\}.$$

[4] Se utiliza el adjetivo "restringida" siguiendo la nomenclatura empleada en [9], pues en la definición original de f-inclusión no se exige la continuidad izquierda en los índices de inclusión.

Para reforzar la validez de este operador como medida de inclusión, en [8,12] se muestra que está alineado con los axiomas de Sinha-Dougherty [16].

2.2. La Base de Conocimiento

Una vez que hemos introducido la noción de f-inclusión, presentamos el marco y la estructura de las reglas que componen la base de conocimiento. Para conocer más detalles sobre la estructura de este SID, el lector puede consultar [5].

Comencemos definiendo el marco en el que se desarrolla el sistema.

Definición 4. *Un* marco *es una tupla* $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$ *donde* X *e* Y *son conjuntos no vacíos, llamados* universos*, y* $\mathcal{A}_X = \{A_1, \ldots, A_n\}$ *y* $\mathcal{B}_Y = \{B_1, \ldots, B_m\}$ *son dos particiones difusas sobre los universos* X *e* Y*.*

Recordemos que una *partición difusa* sobre un universo $\mathcal{U}$ es una familia $\mathcal{A}$ finita de conjuntos difusos tales que para todo $u \in \mathcal{U}$ existe al menos un conjunto difuso $A \in \mathcal{A}$ cumpliendo $u \in \text{supp}(A)$.

La base de conocimiento determina la relación entre los miembros de las dos particiones difusas que componen el marco. Esta relación se determina a través de una serie de reglas difusas.

Definición 5. *Una* base de conocimiento (**KB**) *sobre un marco* $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$ *es un conjunto de reglas de la forma*

$$\langle A_i \rightarrow B_j \quad ; f_{ij} \rangle,$$

donde $A_i \in \mathcal{A}_X$*,* $B_j \in \mathcal{B}_Y$ *y* $f_{ij} \in \mathscr{G}$*.*

Obsérvese que una **KB** puede interpretarse como una relación $\mathscr{G}$-difusa que asigna a cada par de conjuntos difusos $A_i \in \mathcal{A}_X$ y $B_j \in \mathcal{B}_Y$ la aplicación $f_{ij} \in \mathscr{G}$ de la regla $\langle A_i \rightarrow B_j \quad ; f_{ij} \rangle$. De este modo, toda **KB** puede representarse de forma tabular, tal y como se muestra en Tabla 1.

Tabla 1: Representación relacional de una base de conocimiento.

	B_1	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_m
A_1	f_{11}	$\cdots$	f_{1j}	$\cdots$	f_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$
A_i	f_{i1}	$\cdots$	f_{ij}	$\cdots$	f_{im}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A_n	f_{n1}	$\cdots$	f_{nj}	$\cdots$	f_{nm}

La sintaxis de nuestro FIS está determinada directamente por el marco. La siguiente definición introduce la semántica de una base de conocimiento.

Definición 6. *Sea Γ una* **KB** *sobre un marco $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$. Se dice que un conjunto $M \subseteq X \times Y$ es* modelo de Γ *si para toda regla $\langle A_i \to B_j \quad ; f_{ij} \rangle \in \Gamma$ se cumple*

$$f_{ij}(A_i(x)) \leq B_j(y) \tag{1}$$

para todo $(x, y) \in M$.

El lector puede observar que los modelos de una base de conocimiento son conjuntos *crisp*, a pesar de que la información se representa mediante conceptos difusos. En [5] se demuestra que el conjunto de modelos de una base de conocimiento tiene estructura de retículo completo con la unión e intersección de conjuntos.

El modelo maximal de una base de conocimiento Γ, denotado por $\mathbf{M_\Gamma}$, es el que más información proporciona sobre la interpretación de las reglas. Cuanto mayores sean los índices de inclusión que aparecen en las reglas de la **KB**, habrá menos puntos en el plano $X \times Y$ que satisfagan la relación expresada en la Ecuación (1). Esto implica que el modelo maximal $\mathbf{M_\Gamma}$ contendrá menos valores. Por el contrario, cuanto menores sean los índices de inclusión de las reglas, mayor será el modelo maximal, representando un menor vínculo entre los elementos del universo X y los del universo Y.

2.3. Entradas y Salidas del Sistema

Tal y como se ha mencionado al inicio esta sección, tanto las entradas como las salidas del FIS vienen dadas en forma de conjunto difuso.

Definición 7. *Una* entrada *sobre un marco $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$ es un conjunto difuso en X.*

El concepto de entrada se puede extender a conjuntos difusos en Y. No obstante, debido a la estructura del motor de inferencia, solo se utilizarán entradas en el universo en el que se encuentran los antecedentes de las reglas de la **KB**.

El concepto de modelo de una base de conocimiento (Definición 6) se puede extender a una **KB** y una entrada trasladándolo al entorno difuso.

Definición 8. *Sean Γ una* **KB** *y $A \in \mathcal{F}(X)$ una entrada sobre un marco $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$. Un conjunto difuso $M \in \mathcal{F}(X \times Y)$ es* modelo de $\Gamma \cup \{A\}$ *si* $\mathrm{supp}(M)$ *es un modelo de Γ y $M(x, y) \leq A(x)$ para todo $(x, y) \in X \times Y$.*

El conjunto de modelos de una **KB** y de una entrada tiene estructura de retículo con el orden estándar entre conjuntos difusos. En este caso, sus elementos mínimo y máximo son, respectivamente, el conjunto vacío y el conjunto difuso dado, para todo $(x, y) \in X \times Y$, por

$$\mathbf{M_{\Gamma,A}}(x, y) = \begin{cases} A(x) & \text{si } (x, y) \in \mathbf{M_\Gamma}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La noción de modelo en nuestro FIS permite introducir el concepto de consecuencia lógica dentro de este, tal y como se hace en los sistemas lógicos formales.

Definición 9. *Sean Γ una* **KB** *y $A \in \mathcal{F}(X)$ una entrada sobre un marco $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$. Se dice que un conjunto difuso $B \in \mathcal{F}(Y)$ es* consecuencia *de $\Gamma \cup \{A\}$, denotado por $\Gamma \cup \{A\} \models B$, si todo modelo M de $\Gamma \cup \{A\}$ es modelo de $\Gamma \cup \{B\}$.*

2.4. Motor de Inferencia del Sistema

Finalmente, en esta sección se presenta el mecanismo principal de todo sistema de inferencia difuso: su motor de inferencia. En este caso, se trata de un Modus Ponens Generalizado basado en el f-índice de inclusión. Recordemos que el GMP se trata de una regla de inferencia que, de una regla de implicación y de una instancia similar al antecedente, se infiere una salida similar al consecuente.

En [4] se presentó la primera modelización de esta regla de inferencia a través del f-índice de inclusión. Sea $A \in \mathcal{F}(X)$ una entrada sobre un marco $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$ y sea $\langle A_i \to B_j \quad ; f_{ij} \rangle$ una regla asociada a los conjuntos difusos $A_i \in \mathcal{A}_X$ y $B_j \in \mathcal{B}_Y$. EL GMP basado en el f-índice de inclusión aplicado a esta regla y a A genera un conjunto difuso $B_{ij} \in \mathcal{F}(Y)$ a través de la siguiente expresión:

$$\begin{array}{lll} & A_i \to B_j & \equiv f_{ij} \\ & A & \equiv \mathrm{Inc}_{\mathscr{G}}(A, A_i) \\ \hline \therefore & B_{ij} & \overline{\mathrm{Inc}}_{\mathscr{G}}(A, A_i) \circ \overline{f}_{ij}(B_j) \end{array} \tag{2}$$

Nótese que la similaridad entre la entrada y el antecedente de la regla se mide a través del f-índice de inclusión de A en A_i. Esta función se relaciona con la función f_{ij} que aparece en la regla a través de la composición de sus respectivas conexiones de Galois. En [4] se demuestra que esta modelización del GMP está alineada con los axiomas de Baldwin y Pilsworth para reglas de implicación [1].

El próximo resultado demuestra que la salida generada por el GMP presentado en la Ecuación (2) es consecuencia lógica de la instancia y de la regla a las que se aplica.

Teorema 1. *Sean Γ una base de conocimiento y $A \in \mathcal{F}(X)$ una entrada sobre un marco $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$. Para toda regla $\langle A_i \to B_j \quad ; f_{ij} \rangle \in \Gamma$, se cumple que*

$$\{\langle A_i \to B_j \quad ; f_{ij} \rangle,\ A\} \models B_{ij},$$

siendo $B_{ij} \in \mathcal{F}(Y)$ el conjunto difuso dado, para todo $y \in Y$, por

$$B_{ij}(y) = \overline{\mathrm{Inc}}_{\mathscr{G}}(A, A_i) \circ \overline{f}_{ij}(B_j(y)).$$

El motor de inferencia del FIS es el siguiente: dada una entrada $A \in \mathcal{F}(X)$ y una **KB**, la salida del sistema se obtiene calculando la intersección de todos los conjuntos obtenidos al aplicar el GMP a la entrada A y a cada una de las reglas de la base de conocimiento.

El próximo resultado demuestra la validez de las salidas generadas por el motor de inferencia para una entrada y una base de conocimiento. Es decir, indica la *correctitud* del FIS basado en la f-inclusión.

Teorema 2. *Sean Γ una base de conocimiento y $A \in \mathcal{F}(X)$ una entrada sobre un marco $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$. El conjunto difuso $B \in \mathcal{F}(Y)$ dado por*

$$B(y) = \inf_{\substack{A_i \in \mathcal{A}_X, \\ B_j \in \mathcal{B}_Y}} \overline{\mathrm{Inc}}_{\mathscr{I}}(A, A_i) \circ \overline{f}_{ij}(B_j(y))$$

para todo $y \in Y$, es una consecuencia de $\Gamma \cup \{A\}$, es decir, $\Gamma \cup \{A\} \models B$.

3. Propiedad de Monotonía del FIS

En esta sección se introduce el conjunto de consecuencias de una base de conocimiento y de una entrada dentro del FIS basado en la f-inclusión y se demuestra una propiedad relevante sobre la monotonía de este conjunto.

Previamente, se presentan una serie de resultados relacionados con la estructura algebraica de este conjunto de consecuencias, los cuales fueron estudiados inicialmente en [5]. Más adelante, se presenta un método para fusionar la información de dos bases de conocimiento dentro de un marco, y se estudia cómo se modifica el conjunto de consecuencias bajo este fenómeno.

3.1. La Estructura del Conjunto de Consecuencias

Dada una base de conocimiento Γ y una entrada $A \in \mathcal{F}(X)$ sobre un marco $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$, definimos el *conjunto de consecuencias de $\Gamma \cup \{A\}$* como:

$$\mathbb{C}_{\Gamma,A} = \{B \in \mathcal{F}(Y) \mid \Gamma \cup \{A\} \models B\}.$$

En el siguiente resultado se muestra que, cuando un conjunto difuso $B \in \mathcal{F}(Y)$ pertenece a $\mathbb{C}_{\Gamma,A}$, entonces cualquier otro conjunto difuso que contenga a B también pertenece a este conjunto.

Proposición 1 ([5]). *Sea Γ una* **KB** *y sea $A \in \mathcal{F}(X)$ una entrada sobre el marco $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$. Sean dos conjuntos difusos $B, B' \in \mathcal{F}(Y)$ tales que $B \subseteq B'$. Si $\Gamma \cup \{A\} \models B$, entonces $\Gamma \cup \{A\} \models B'$.*

Recordemos que el conjunto de modelos de una entrada A y de una **KB** Γ posee estructura de retículo acotado. El conjunto $\mathbb{C}_{\Gamma,A}$ hereda esta estructura.

Teorema 3 ([5]). *Sea Γ una* **KB** *y sea $A \in \mathcal{F}(X)$ una entrada sobre un marco $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$. Sean $B, B' \in \mathcal{F}(Y)$ dos conjuntos difusos tales que $\Gamma \cup \{A\} \models B$ y $\Gamma \cup \{A\} \models B'$. Entonces, $\Gamma \cup \{A\} \models B \cap B'$ y $\Gamma \cup \{A\} \models B \cup B'$.*

En definitiva, el conjunto de consecuencias de una entrada A y de una base de conocimiento Γ tiene estructura de retículo completo y, según la Proposición 1, su elemento máximo es el universo Y. Además, si se conoce su elemento mínimo, se puede inferir todo el conjunto $\mathbb{C}_{\Gamma,A}$.

3.2. Fusión de Bases de Conocimiento

Dentro del contexto de los sistemas lógicos formales, la propiedad de *monotonía* de un sistema se refiere a que, cuanto mayor es el número de axiomas, mayor es el número de teoremas. En el contexto de nuestro sistema de inferencia, esta propiedad puede reformularse en los siguientes términos: la inclusión de nueva información dentro de la base de conocimiento no invalida las conclusiones previas.

Dentro del marco en el que se desarrolla nuestro FIS, la inclusión de información nueva viene dada en forma de nuevas reglas que están contenidas dentro de una base de conocimiento.

Cuando se unen dos **KB**s, los antecedentes y los consecuentes de sus reglas han de estar definidos respectivamente en los mismos universos; no obstante, pueden estar definidos para diferentes particiones. Por tanto, al fusionarse, también ha de generarse un nuevo marco que incluya todos los conjuntos difusos involucrados en las reglas.

Definición 10. *Sean* $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$ *y* $(X, Y, \mathcal{C}_X, \mathcal{D}_Y)$ *dos marcos disjuntos, es decir, que sus particiones no poseen conjuntos difusos en común. Sean* Γ *y* Π *dos bases de conocimiento definidas en* $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$ *y en* $(X, Y, \mathcal{C}_X, \mathcal{D}_Y)$*, respectivamente:*

$$\Gamma = \{\langle A_i \to B_j \quad ; f_{ij}\rangle \mid A_i \in \mathcal{A}_X,\ B_j \in \mathcal{B}_Y,\ f_{ij} \in \mathscr{G}\}\ \ y$$
$$\Pi = \{\langle C_k \to D_l \quad ; g_{kl}\rangle \mid C_k \in \mathcal{C}_X,\ D_l \in \mathcal{D}_Y,\ g_{kl} \in \mathscr{G}\}\,.$$

La unión de Γ y Π*, denotada por* $\Gamma \sqcup \Pi$*, consiste en la* **KB** *definida sobre el marco* $(X, Y, \mathcal{A}_X \cup \mathcal{C}_X, \mathcal{B}_Y \cup \mathcal{D}_Y)$ *donde la asignación de un índice de inclusión para cada par de conjuntos difusos en* $(\mathcal{A}_X \cup \mathcal{C}_X) \times (\mathcal{B}_Y \cup \mathcal{D}_Y)$*, interpretando* **KB** *como una relación* $\mathscr{G}$*-difusa, se realiza bajo los siguientes criterios:*

- *Cuando el par de conjuntos difusos pertenece a* $\mathcal{A}_X \times \mathcal{B}_Y$*, entonces su índice de inclusión asociado es el que tiene originalmente asignado en* Γ*.*
- *Análogamente, cuando el par de conjuntos difusos pertenece a* $\mathcal{C}_X \times \mathcal{D}_Y$*, entonces su índice de inclusión asociado es el que tiene originalmente asignado en* Π*.*
- *Si los conjuntos difusos pertenecen a particiones en marcos diferentes (sea* $\mathcal{A}_X \times \mathcal{D}_Y$ *o* $\mathcal{C}_X \times \mathcal{B}_Y$*), entonces su índice de inclusión asociado es* $\mathbf{0}$*.*

En el último caso de la Definición 10, se asume que el índice de inclusión asociado a la regla es $\mathbf{0}$ pues se desconoce la relación entre los conjuntos difusos involucrados, y este índice de inclusión es equivalente a no imponer ninguna restricción.

Para facilitar la comprensión de esta definición, en la Tabla 2 se muestra la representación relacional de la base de conocimiento resultante al unir dos **KB**s distintas.

En el siguiente resultado se demuestra que, cuando se fusionan dos bases de conocimiento en un mismo marco, no sólo se conservan los conjuntos de consecuencias anteriores, sino que la intersección de consecuencias de los diferentes marcos pertenece al nuevo conjunto de consecuencias.

Tabla 2: Representación relacional de la fusión de bases de conocimiento según los criterios expresados en la Definición 10. A la izquierda, representación de dos **KB**s Γ y Π. A la derecha, representación de la unión $\Gamma \sqcup \Pi$.

Base de conocimiento Γ:

	B_1	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_m
A_1	f_{11}	$\cdots$	f_{1j}	$\cdots$	f_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$
A_i	f_{i1}	$\cdots$	f_{ij}	$\cdots$	f_{im}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A_n	f_{n1}	$\cdots$	f_{nj}	$\cdots$	f_{nm}

Base de conocimiento Π:

	D_1	$\cdots$	D_l	$\cdots$	D_s
C_1	g_{11}	$\cdots$	g_{1l}	$\cdots$	g_{1s}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$
C_k	g_{k1}	$\cdots$	g_{kl}	$\cdots$	g_{ks}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
C_r	g_{r1}	$\cdots$	g_{rl}	$\cdots$	g_{rs}

Fusión de las KBs Γ y Π ($\Gamma \sqcup \Pi$):

	B_1	$\cdots$	B_m	D_1	$\cdots$	D_s
A_1	f_{11}	$\cdots$	f_{1m}	$\mathbf{0}$	$\cdots$	$\mathbf{0}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_n	f_{n1}	$\cdots$	f_{nm}	$\mathbf{0}$	$\cdots$	$\mathbf{0}$
C_1	$\mathbf{0}$	$\cdots$	$\mathbf{0}$	g_{11}	$\cdots$	g_{1s}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
C_r	$\mathbf{0}$	$\cdots$	$\mathbf{0}$	g_{r1}	$\cdots$	g_{rs}

Teorema 4. *Sean $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$ y $(X, Y, \mathcal{C}_X, \mathcal{D}_Y)$ dos marcos con sus correspondientes* **KB***s Γ y Π. Sean $A \in \mathcal{F}(X)$ una entrada y $B, D \in \mathcal{F}(Y)$ dos conjuntos difusos. Si*

- $\Gamma \cup \{A\} \models B$ *en* $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$ *y*
- $\Pi \cup \{A\} \models D$ *en* $(X, Y, \mathcal{C}_X, \mathcal{D}_Y)$,

entonces $\{\Gamma \sqcup \Pi\} \cup \{A\} \models B \cap D$ *en* $(X, Y, \mathcal{A}_X \cup \mathcal{C}_X, \mathcal{B}_Y \cup \mathcal{D}_Y)$.

Esta propiedad del FIS se refleja en las salidas del motor de inferencia tal y como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 5. *Sean $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$ y $(X, Y, \mathcal{C}_X, \mathcal{D}_Y)$ dos marcos con sus correspondientes* **KB***s Γ y Π, y sea $A \in \mathcal{F}(X)$ una entrada. Sean B y D las salidas obtenidas tras aplicar el motor de inferencia a Γ y A en $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$ y a Π y A en $(X, Y, \mathcal{C}_X, \mathcal{D}_Y)$, respectivamente. Entonces, la salida obtenida aplicando el motor de inferencia a $\Gamma \sqcup \Pi$ y A es $B \cap D$.*

El siguiente resultado muestra que nuestro FIS es monótono.

Corolario 1. *Sean $(X, Y, \mathcal{A}_X, \mathcal{B}_Y)$ y $(X, Y, \mathcal{C}_X, \mathcal{D}_Y)$ dos marcos con sus correspondientes* **KB***s Γ y Π, y sea $A \in \mathcal{F}(X)$ una entrada. Entonces, $\mathbb{C}_{\Gamma,A} \subseteq \mathbb{C}_{\Gamma \sqcup \Pi,A}$ y $\mathbb{C}_{\Pi,A} \subseteq \mathbb{C}_{\Gamma \sqcup \Pi,A}$.*

4. Conclusiones y Trabajo Futuro

En este trabajo se ha recordado la estructura de los sistemas de inferencia basados en la f-inclusión, prestando especial atención a sus conjuntos de reglas y al mecanismo del motor de inferencia. Entre las novedades presentadas por este FIS, una de las más destacables es su fundamento lógico, que permite incluir la definición de consecuencia lógica dentro de su marco. Esta noción contribuye al FIS en dos aspectos distintos: es un elemento clave para demostrar la correctitud del sistema y, al mismo tiempo, permite analizar el conjunto de consecuencias del FIS independientemente de las salidas obtenidas por el motor de inferencia.

Con respecto a este último aspecto, este artículo se centra en el comportamiento del conjunto de consecuencias bajo modificaciones en el conjunto de reglas del sistema. Hemos concluido que la unión de bases de conocimiento preserva las consecuencias previas, lo cual demuestra la monotonía del FIS como sistema lógico formal.

Con estos resultados, hemos obtenido una herramienta poderosa para la búsqueda de algoritmos orientados a la resolución de problemas de regresión. Como trabajo futuro, pretendemos profundizar en este aspecto y hallar un resultado de aproximación universal de funciones continuas haciendo uso de este sistema de inferencia difuso basado en la f-inclusión.

Si bien el proceso de fusión de bases de conocimiento tiene una utilidad innegable, presenta una clara desventaja, a saber, el incremento del coste computacional del sistema. No obstante, los avances presentados en este trabajo pueden ayudarnos en el futuro a explorar métodos adicionales para modificar los conjuntos de reglas con el fin de optimizar la implementación del motor de inferencia sin requerir recursos computacionales adicionales. También será interesante explorar las cuestiones relacionadas con la gestión y optimización de bases de reglas difusas, una temática de interés recurrente en el ámbito de los sistemas de inferencia.

Agradecimientos. Carolina Díaz Montarroso y Jorge Elorza agradecen el apoyo financiero del proyecto PID2024-155289NB-I00 financiado por MICIU /AEI / 10.13039/501100011033 / FEDER, UE. Carolina Díaz Montarroso agradece el apoyo de la Asociación de Amigos de la Universidad de Navarra.

Nicolás Madrid agradece el apoyo financiero de los proyectos PID2022-137620NB-I00 y PID2022-140630NB-I00 financiados por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y FEDER, UE, de la beca TED2021-129748B-I00 financiada por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y NextGenerationEU/PRTR, y del proyecto FEDER-UCA-2024-A2-04 financiado por el Programa Operativo FEDER Andalucía 2021-2027 y por la Consejería de Universidad, Investigación e Innovación, Junta de Andalucía.

Declaración de intereses. Los autores declaran no tener ningún conflicto de intereses que pudiera haber influido en el trabajo presentado en este artículo.

Referencias

1. Baldwin, J.F., Pilsworth, B.W.: Axiomatic approach to implication for approximate reasoning with fuzzy logic. Fuzzy Sets and Systems **3**(2), 193–219 (1980). https://doi.org/10.1016/0165-0114(80)90054-8
2. Cao, J., Zhou, T., Zhi, S., Lam, S., Ren, G., Zhang, Y., Wang, Y., Dong, Y., Cai, J.: Fuzzy inference system with interpretable fuzzy rules: Advancing explainable artificial intelligence for disease diagnosisA comprehensive review. Information Sciences **662**, 120212 (Mar 2024). https://doi.org/10.1016/j.ins.2024.120212
3. Daňková, M.: On approximate reasoning with graded rules. Fuzzy Sets and Systems **158**(6), 652–673 (2007). https://doi.org/10.1016/j.fss.2006.11.019
4. Díaz-Montarroso, C., Madrid, N., Ramírez-Poussa, E.: Towards a Generalized Modus Ponens Based on the f-Index of Inclusion. In: Conceptual Knowledge Structures: First International Joint Conference, CONCEPTS 2024, Cádiz, Spain, September 9–13, 2024, Proceedings. pp. 36–48. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2024). https://doi.org/10.1007/978-3-031-67868-4_3
5. Díaz-Montarroso, C., Madrid, N., Ramírez-Poussa, E.: Correctness of Fuzzy Inference Systems Based on f-Inclusion. Mathematics **13**(11) (2025). https://doi.org/10.3390/math13111897
6. Ganter, B., Wille, R.: Formal concept analysis: mathematical foundations. Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg, 1 edn. (1999). https://doi.org/10.1007/978-3-642-59830-2
7. Kazeminezhad, M., Etemad-Shahidi, A., Mousavi, S.: Application of fuzzy inference system in the prediction of wave parameters. Ocean Engineering **32**(14-15), 1709–1725 (Oct 2005). https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2005.02.001
8. Madrid, N., Ojeda-Aciego, M.: A view of f-indexes of inclusion under different axiomatic definitions of fuzzy inclusion. In: Moral, S., Pivert, O., Sánchez, D., Marín, N. (eds.) Scalable Uncertainty Management. vol. 10564, pp. 307–318. Springer International Publishing (2017). https://doi.org/10.1007/978-3-319-67582-4_22
9. Madrid, N., Ojeda-Aciego, M.: The f-index of inclusion as optimal adjoint pair for fuzzy modus ponens. Fuzzy Sets and Systems **466**, 108474 (2023). https://doi.org/10.1016/j.fss.2023.01.009
10. Madrid, N., Ojeda-Aciego, M.: Composition as a fuzzy conjunction between indexes of inclusion. Fuzzy Sets and Systems **527**, 109685 (2026). https://doi.org/10.1016/j.fss.2025.109685
11. Madrid, N., Ojeda-Aciego, M., Perfiljeva, I.: f-inclusion indexes between fuzzy sets. In: Proceedings of the 2015 Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology. pp. 1528–1533. Advances in Intelligent Systems Research, Atlantis Press (2015). https://doi.org/10.2991/ifsa-eusflat-15.2015.217
12. Madrid, N., Ramírez-Poussa, E.: Analysis of the φ-index of inclusion restricted to a set of indexes. In: Lecture Notes in Networks and Systems. vol. 1174 LNNS, pp. 3–11. Springer Science and Business Media Deutschland GmbH (2024). https://doi.org/10.1007/978-3-031-74003-9_1
13. Mamdani, E.H., Assilian, S.: An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. International Journal of Man-Machine Studies **7**(1), 1–13 (1975). https://doi.org/10.1016/S0020-7373(75)80002-2
14. Novák, V., Perfilieva, I., Močkoř, J.: Mathematical Principles of Fuzzy Logic. Springer US, Boston, MA (1999). https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5217-8

15. Pedrycz, W.: Applications of fuzzy relational equations for methods of reasoning in presence of fuzzy data. Fuzzy Sets and Systems **16**(2), 163–175 (Jul 1985). https://doi.org/10.1016/S0165-0114(85)80016-6
16. Sinha, D., Dougherty, E.: Fuzzification of Set Inclusion: Theory and Applications. Fuzzy Sets and Systems **55**(1), 15–42 (1993). https://doi.org/10.1016/0165-0114(93)90299-W
17. Straccia, U.: A fuzzy description logic. In: AAAI/IAAI. pp. 594–599 (1998), https://www.aaai.org/Papers/AAAI/1998/AAAI98-084.pdf
18. Štěpnička, M., Jayaram, B., Su, Y.: A short note on fuzzy relational inference systems. Fuzzy Sets and Systems **338**, 90–96 (2018). https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.fss.2017.08.006