Bases de implicaciones de atributos en enfoques basados en conexiones de Galois

M. Eugenia Cornejo[000-0002-8230-0044], Jesús Medina[0000-0002-3931-5873] y Francisco José Ocaña[0000-0002-7037-4994]*

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, Cádiz, España
{mariaeugenia.cornejo, jesus.medina, franciscojose.ocana}@uca.es

Resumen Este trabajo recopila resultados recientes sobre la construcción de bases de implicaciones de atributos en marcos con conexiones de Galois que se han presentado en el artículo científico *M. E. Cornejo, J. Medina, and F. J. Ocaña. Attribute implication bases from Galois connection structures, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 49:27292753, 2025.*

Palabras clave: Implicaciones de atributos · conexión de Galois · bases · multiadjunto · retículos de conceptos multiadjunto

1. Introducción

Uno de los principales desafíos en la teoría del Análisis de Conceptos Formales es la determinación de un subconjunto no redundante de implicaciones de atributos válidas a partir del cual se puedan derivar todas las demás, es decir, una base de implicaciones de atributos. Se han propuesto diversos enfoques para su obtención tanto en el marco clásico [3,4,5] como en el residuado [1], sin embargo, los mecanismos subyacentes a estos procedimientos no son equivalentes en general. En [2], proponemos un procedimiento novedoso para calcular bases de implicaciones de atributos en contextos donde se pueda definir una conexión de Galois, con especial énfasis en el marco multiadjunto, uno de los entornos difusos más generales donde los operadores de formación de conceptos forman una conexión de Galois. El cálculo de estas bases está inspirado en la metodología clásica de Guigues-Duquenne [5] y se basa en la noción de nodo no redundante minimal. Este enfoque explota la estructura de clausura inducida por la conexión de Galois para definir las nociones clave para la teoría de implicaciones de atributos.

2. Nodos no redundantes minimales en retículos de conceptos multiadjuntos

El objetivo principal de esta sección es presentar una extensión de la noción de nodo no redundante minimal al marco multiadjunto. Por ello, necesitamos

* Autor de correspondencia.

considerar un marco multiadjunto $(L_1, L_2, P, \preceq_1, \preceq_2, \leq, \&_1, \swarrow^1, \nwarrow_1, \ldots, \&_n, \swarrow^n, \nwarrow_n)$ y un contexto (A, B, R, σ) junto con su correspondiente retículo de conceptos multiadjunto $(\mathcal{M}, \preceq)$. Comenzamos introduciendo la noción de implicación informativa.

Definición 1. Dados $f_1, f_2 \in L_1^A$, decimos que una implicación de atributos $f_2 \Leftarrow f_1$ es *informativa* si $f_2 \preceq_1 f_1^{\downarrow\uparrow}$ y $f_2 \not\preceq_1 f_1$.

Esta noción nos permite establecer una relación de orden entre las implicaciones de atributos completamente válidas, es decir, aquellas implicaciones de atributos cuyo grado de validez es igual a 1, con el fin de determinar cuándo una implicación es más informativa que otra. El conjunto de todas las implicaciones de atributos completamente válidas se denotará como $\mathcal{F}_t$.

Definición 2. Dados $f_1, f_2, f_3, f_4 \in L_1^A$, decimos que una implicación de atributos $f_2 \Leftarrow f_1$ es *al menos tan informativa como* $f_4 \Leftarrow f_3$, lo cual se denota como $f_4 \Leftarrow f_3 \sqsubseteq f_2 \Leftarrow f_1$, si $f_1 \preceq_1 f_3$ y $f_4 \preceq_1 f_2$.

Además, si asumimos que L_1 es finito, el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{F}_t, \sqsubseteq)$ admite elementos maximales. Estos elementos representan las implicaciones más informativas dentro del contexto dado.

Definición 3. Dados dos subconjuntos de atributos $f_1, f_2 \in L_1^A$, decimos que la implicación de atributos $f_2 \Leftarrow f_1 \in \mathcal{F}_t$ es una *implicación informativa maximal*, si es un elemento maximal del conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{F}_t, \sqsubseteq)$, es decir, $f_2 \Leftarrow f_1 \not\sqsubseteq f_4 \Leftarrow f_3$ para todo $f_4 \Leftarrow f_3 \in \mathcal{F}_t$. El conjunto de todas las implicaciones informativas maximales de $(\mathcal{M}, \preceq)$ se denotará como $\mathbf{M}\mathcal{F}_t$.

Las implicaciones de atributos maximales pueden caracterizarse en términos de subintensiones irreducibles, cuya definición se introduce a continuación.

Definición 4. Sea $i \in Int(\mathcal{M})$ una intensión de un concepto de $(\mathcal{M}, \preceq)$. Llamamos *subintensión* de i a cualquier subconjunto f de i tal que $f^{\downarrow\uparrow} = i$. Denotamos por $\mathcal{S}(i)$ al conjunto de todas las subintensiones de i. Decimos que una subintensión es *irreducible* si es un conjunto minimal en $\mathcal{S}(i)$. La unión de todas las subintensiones irreducibles se denota por $\mathcal{IS}_{\mathcal{M}}$.

Estos elementos desempeñan un papel fundamental para identificar las implicaciones informativas maximales, tal como se presenta en la siguiente proposición.

Proposición 1. *Dado $i \in Int(\mathcal{M})$, si $\mathcal{S}(i) \neq \{i\}$, entonces los conjuntos no cerrados $f \in L_1^A$ que sirven como antecedentes para las implicaciones informativas maximales $i \Leftarrow f$ son las subintensiones irreducibles de i.*

Como consecuencia de este resultado, el conjunto de implicaciones informativas maximales puede expresarse como $\mathbf{M}\mathcal{F}_t = \{f^{\downarrow\uparrow} \Leftarrow f \mid f \in \mathcal{IS}_{\mathcal{M}}\}$. La relevancia de este conjunto radica en su relación para la construcción de bases sustentadas en el concepto de *nodo no redundante minimal*. Estos subconjuntos de atributos pueden caracterizarse a través del proceso conocido como presaturación, el cual constituye un paso clave en la construcción de la base propuesta por Guigues y Duquenne [5].

Definición 5. Dado un sistema de implicaciones informativas $\mathcal{T}$ y un subconjunto difuso de atributos $f \in L_1^A$, se define el conjunto:

$$\overline{f}^{\mathcal{T}} = \bigvee \left(\{f\} \cup \{h^{\downarrow\uparrow} \mid h \prec_1 f, h \in J_{\mathcal{T}},\ y\ h^{\downarrow\uparrow} \neq f^{\downarrow\uparrow}\} \right)$$

como el $\mathcal{T}$-*presaturado* de f, donde $J_{\mathcal{T}} = \{h \in L_1^A \mid \Leftarrow h \in \mathcal{T}\}$.

Basándonos en el operador de presaturación, podemos caracterizar los denominados nodos no redundantes.

Lema 1. *Dado un sistema de implicaciones informativo $\mathcal{T}$, un subconjunto difuso de atributos $f \in L_1^A$ es un nodo no redundante si y solo si $f = \overline{f}^{\mathcal{T}}$ y $f \neq f^{\downarrow\uparrow}$.*

Finalmente, introducimos la noción de nodo no redundante minimal, la cual desempeña un papel crucial en la caracterización de las bases implicacionales.

Definición 6. Dado un sistema de implicaciones informativo $\mathcal{T}$, un *nodo no redundante minimal* es un nodo no redundante $f \in L_1^A$ tal que para cada subconjunto $h \preceq_1 f$, si $h^{\downarrow\uparrow} = f^{\downarrow\uparrow}$ y $h = \overline{h}^{\mathcal{T}}$, entonces $h = f$. El conjunto de nodos no redundantes minimales se denotará como $\mathcal{N}_0$.

3. Bases de implicaciones de atributos en retículos de conceptos multiadjuntos

Como hemos comentado en la sección anterior, los nodos minimales tienen una relación directa con la construcción de bases. Concretamente, las bases pueden obtenerse considerando únicamente las clases de equivalencia generadas por cada nodo no redundante minimal. Este resultado constituye uno de los pilares fundamentales de esta contribución.

Teorema 1. *Sea $(\&, \swarrow, \nwarrow)$ un triple adjunto con respecto a $(L_1, \preceq_1)$ tal que $\nwarrow$ es una implicación forzada. Dado un sistema de implicaciones de atributos informativo $\mathcal{M}_A$-completo $\mathcal{T}$, y una familia de subconjuntos difusos de atributos $\mathcal{F}$ compuesta por una única clase representativa $[f]_{\cong_\tau}$, con $f \in \mathcal{N}_0$, cualquier sistema de implicaciones definido como:*

$$\mathfrak{B} = \{h^{\downarrow\uparrow} \Leftarrow h \mid h \in \mathcal{F}\}$$

constituye una base, es decir, es $\mathcal{M}_A$-completo y no redundante.

Como consecuencia del resultado anterior, es posible generar diferentes bases para un mismo contexto. Por ejemplo, se puede distinguir entre bases de implicaciones de atributos cuyos antecedentes son exclusivamente nodos minimales y aquellas cuyos antecedentes corresponden únicamente a subintensiones irreducibles. Este hecho queda reflejado en la siguiente proposición.

Proposición 2. *Sea* $(\&, \swarrow, \nwarrow)$ *un triple adjunto respecto a* $(L_1, \preceq_1)$ *tal que* $\nwarrow$ *es una implicación forzada. Dado un sistema de implicaciones informativo* $\mathcal{M}_A$*-completo* $\mathcal{T}$*, y una familia de subintensiones irreducibles* $\mathcal{F}_I$ *seleccionadas de cada clase* $[f]_{\cong}$*, donde* $f \in \mathcal{N}_0$*. Los conjuntos de implicaciones de atributos definidos como:*

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{N}_0} = \{f^{\downarrow\uparrow} \Leftarrow f \mid f \in \mathcal{N}_0\}$$
$$\mathfrak{B}_I = \{l^{\downarrow\uparrow} \Leftarrow l \mid l \in \mathcal{F}_I\}$$

son $\mathcal{M}_A$*-completos y no redundantes.*

4. Conclusiones y trabajo futuro

Este trabajo presenta un procedimiento general para construir bases de implicaciones de atributos a partir de datos, aplicable a distintos enfoques basados en conexiones de Galois. Este enfoque se ha particularizado en el marco de los retículos de conceptos multiadjuntos, lo cual ha permitido el desarrollo de mecanismos formales para obtener bases de implicaciones desde perspectivas complementarias, consolidando una visión unificada en contextos difusos. Como trabajo futuro, se contempla aplicar los resultados obtenidos para evaluar su utilidad práctica en la extracción automática de conocimiento. En particular, se continuarán los estudios aplicados en el ámbito de las energías renovables propuestos por el Grupo Energético de Puerto Real, centrándose en la detección de anomalías tanto en instalaciones fotovoltaicas como en redes de abastecimiento de agua.

Agradecimientos Trabajo parcialmente subvencionado por el proyecto PID2022-137620NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE, por el proyecto TED2021-129748BI00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por la Unión Europea NextGenerationEU/PRTR, y por el proyecto FEDER-UCA-2024-A2-04 financiado por el Programa Operativo FEDER Andalucía 2021-2027 y la Consejería de Universidad, Investigación e Innovación, Junta de Andalucía.

Referencias

1. Belohlávek, R., Vychodil, V.: Attribute dependencies for data with grades I,. International Journal of General Systems **45**(7-8), 864–888 (2016)
2. Cornejo, M.E., Medina, J., Ocaña, F.J.: Attribute implication bases from Galois connection structures. Mathematical Methods in the Applied Sciences **49**(4), 2729–2753 (2026)
3. Ganter, B., Wille, R.: Formal Concept Analysis: Mathematical Foundation. Springer Verlag (1999)
4. Ganter, B.: Two basic algorithms in concept analysis. In: Kwuida, L., Sertkaya, B. (eds.) Formal Concept Analysis. pp. 312–340. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg (2010)
5. Guigues, J.L., Duquenne, V.: Familles minimales d'implications informatives résultant d'un tableau de données binaires. Mathématiques et Sciences Humaines **95**, 5–18 (1986)