Combinación entre funciones de overlap y operadores OWA

M. Ferrero-Jaurrieta[1][0000−0002−6854−3437], J. Baz[2][0000−0003−1142−6077], N. Rico[3][0000−0002−6169−4523], and H. Bustince[1][0000−0002−1279−6195]

[1] Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra (UPNA), Campus Arrosadía s/n, 31006, Pamplona, España
mikel.ferrero@unavarra.es
[2] Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino, Corso Duca degli Abruzzi, 24, Torino, I-10129, Italy juan.bazgonzalez@polito.it
[3] Departamento de Informática, Universidad de Oviedo, C. San Francisco, 3, 33003, Oviedo, España riconoelia@uniovi.es

Abstract. El presente es un trabajo en progreso donde se presentan resultados preliminares (ongoing research). En este trabajo se presentan los operadores OWA basados en funciones de overlap, los cuales son generalizaciones tanto de los operadores OWA como de las funciones de overlap. Se presentan unos resultados preliminares así como líneas de continuación de trabajo.

Keywords: Funciones de agregación · Operadores OWA · Funciones de overlap.

1 Introducción

Los operadores OWA [8] son una familia de funciones que han sido objeto de estudio de la comunidad científica en las cuatro últimas décadas, habiéndose presentado diversas generalizaciones, extensiones y aplicaciones de estos operadores. Una generalización que cobra relevancia en el contexto de la toma de decisión multicriterio, pero no sólo, es el operador OWA basado en t-normas (TOWA) [9]. En ese contexto, se entiende que el grado de satisfacción se basa en una operación que tiene en cuenta los distintos valores asociados a cada subconjunto y que, implícitamente, al igual que en otros enfoques basados en operadores OWA, se utiliza el mínimo. Por ello, en lugar de utilizar el mínimo, utiliza t-normas, permitiendo una "interacción sinérgica" entre la satisfacción de los argumentos [9].

Para abordar limitaciones en el uso de t-normas en la fusión de información debido a la imposición del elemento neutro, la asociatividad y la falta de continuidad, se introdujeron las funciones de overlap [2], contextualizadas en el ámbito de la clasificación y el procesamiento de imágenes. A nivel de clasificación de las funciones de agregación, las funciones de overlap constituyen una familia de funciones que pueden ser conjuntivas, mezcla o promedio [1]. Motivados por este contexto, proponemos los operadores OWA basados en funciones de overlap;

una nueva familia de funciones de agregación que constituyen la mezcla y generalización de los operadores OWA y las funciones de overlap. Esta nueva familia de operadores permite compensar la conjuntividad de los operadores, así como los beneficios que permite la propiedad de continuidad en los operadores. En este trabajo preliminar presentamos la definición de estos operadores, la relación con otras funciones de agregación y el estudio de algunas de sus propiedades. Por último, presentamos las futuras líneas de investigación en este contexto.

2 Definiciones preliminares

Los operadores OWA basados en funciones de overlap están relacionados con otras familias de operadores, cuya definición se recuerda brevemente a continuación.

Definición 1 ([6]). *Una aplicación* $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *es una t-norma si es creciente, conmutativa, asociativa y* $T(x,1) = x$*, para todo* $x \in [0,1]$*.*

Definición 2 ([5]). *Una aplicación* $O\colon [0,1]^n \to [0,1]$ *es una función de overlap n-dimensional si es simétrica, creciente, continua y cumple que* $O(\mathbf{x}) = 0$ *si y solo si* $\prod_{i=1}^n x_i = 0$ *y que* $O(\mathbf{x}) = 1$ *si y solo si* $\prod_{i=1}^n x_i = 1$*.*

Definición 3 ([8]). *Sea* $n \in \mathbb{N}$*,* $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in [0,1]^n$*, tal que* $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ *y* $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$*. Un operador OWA (Ordered Weighted Averaging) es una aplicación* $OWA_{\mathbf{w}}\colon [0,1]^n \to [0,1]$ *dada por:* $OWA_{\mathbf{w}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n w_i x_{(i)}$*, donde* $(\ )$ *es una permutación de* $\mathbf{x}$ *tal que* $x_{(1)} \geq \ldots \geq x_{(n)}$*.*

Definición 4 ([9]). *Sea* $n \in \mathbb{N}$*,* $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in [0,1]^n$*, tal que* $\sum_{i=1}^n w_i = 1$*,* $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *una t-norma y* $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$*. Un operador TOWA (OWA basado en t-norma) es una aplicación* $TOWA_{\mathbf{w}}\colon [0,1]^n \to [0,1]$ *dada por* $TOWA_{\mathbf{w}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n w_i T(x_{(1)}, \ldots x_{(i)})$ *donde* $(\ )$ *es una permutación de* $\mathbf{x}$ *tal que* $x_{(1)} \geq \ldots \geq x_{(n)}$*.*

Se considera, salvo que se especifique lo contrario, que el dominio de las funciones consideradas es siempre $[0,1]^n$.

3 Operadores OWA basados en funciones de overlap

Definición 5. *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in [0,1]^n$*, tal que* $\sum_{i=1}^n w_i = 1$*. Sea* $\mathbf{O} = (O_1, \ldots, O_n)$ *una secuencia de funciones de overlap k-dimensionales, tal que* $O_k\colon [0,1]^k \to [0,1]$*, para todo* $k \in \{1, \ldots, n\}$*. El operador OWA basado en funciones de overlap es una aplicación* $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}\colon [0,1]^n \to [0,1]$ *dada por la siguiente expresión:*

$$\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} w_k O_k(x_{(1)}, \ldots x_{(k)}) \tag{1}$$

donde $(\ )$ *es una permutación de* $\mathbf{x}$ *tal que* $x_{(1)} \geq \ldots \geq x_{(n)}$*.*

Obsérvese que, en la Definición 5, la función $O_1\colon [0,1] \to [0,1]$ no es una función de overlap propiamente dicha. En este sentido, cabe señalar que $O_1(x) = x$ no se cumple en general para todo $x \in [0,1]$. En particular, requerimos a O_1 ser una función continua y creciente que satisface $O_1(0) = 0$ y $O(1) = 1$, lo que sería la concreción de la función de overlap a aridad 1. Por otro lado, nótese que si en la Definición 5 consideramos $O_1(x) = x$ y $O_k(x_1, \ldots, x_k) = \min(x_1, \ldots, x_k)$, para todo $k \in \{2, \ldots, n\}$ se recupera el operador OWA operator clásico [8]. Además, si $O_1(x) = x$ y $O_k(x_1, \ldots, x_k) = T(x_1, \ldots, x_k)$, donde $T\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ es una t-norma, recuperamos el operador TOWA [9]. En primer lugar, se prueban algunas propiedades básicas de este tipo de operadores.

Proposición 1. *Todo operador OWA basado en funciones de overlap $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}$ es simétrico, creciente, continuo, y cumple que si $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}(\mathbf{x}) = 0$ entonces $\prod_{i=1}^{n} x_i = 0$ y que si $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$ entonces $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}(\mathbf{x}) = 1$.*

Proposición 2. *Sea $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}$ un operador OWA basado en funciones de overlap. Entonces,*

- $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}(\mathbf{x}) = 0 \iff \prod_{i=1}^{n} x_i = 0$ *se cumple si y solo si* $w_n = 1$
- $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}(\mathbf{x}) = 1 \iff \prod_{i=1}^{n} x_i = 1$ *se cumple si y solo si* $w_n > 0$.

Proposición 3. *Sean $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}_1}$ y $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}_2}$ dos operadores OWA basados en funciones de overlap. Entonces, para todo $\lambda \in [0,1]$, se tiene que*

$$\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}(\mathbf{x}) = \lambda \Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O_1}}(\mathbf{x}) + (1-\lambda)\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O_2}}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in [0,1]^n,$$

donde $O_k(x_1, \ldots, x_k) = \lambda O_{k,1}(x_1, \ldots, x_k) + (1-\lambda)O_{k,2}(x_1, \ldots, x_k)$.

A continuación, nos centramos en su dualidad.

Proposición 4. *Sea $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}$ un operador OWA basado en funciones de overlap. Sea $f_k : [0,1]^n \to [0,1]$ una función definida como $f_k(\mathbf{x}) = O_k(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)})$ para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ and $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, si $\mathbf{w}$ es simétrico y f_{n-k+1} es el dual de f_k, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}$ es autodual.*

Proposición 5. *Sean $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}$ y $\Omega_{\mathbf{v},\mathbf{P}}$ dos operadores OWA basados en funciones de overlap. Sean $f_k, g_k : [0,1]^n \to [0,1]$ dos funciones definidas como $f_k(\mathbf{x}) = O_k(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)})$ y $g_k(\mathbf{x}) = P_k(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)})$, para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ y $k \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, si f_{n-k+1} es dual de g_k para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ y $w_k = v_{n-k+1}$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}$ es el dual de $\Omega_{\mathbf{v},\mathbf{P}}$.*

Finalmente, damos una propiedad de monotonía respecto al vector de pesos.

Proposición 6. *Sean $\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}$ y $\Omega_{\mathbf{v},\mathbf{O}}$ dos operadores OWA basados en funciones de overlap tal que existe una función de overlap n-dimensional tal que $O_k(x_1, \ldots, x_i) = O(1, \ldots, 1, x_1, \ldots, x_k)$ para todo $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$ y $k \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, si $\sum_{i=0}^{k} w_i \leq \sum_{i=0}^{k} v_i$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, se cumple*

$$\Omega_{\mathbf{w},\mathbf{O}}(\mathbf{x}) \geq \Omega_{\mathbf{v},\mathbf{O}}(\mathbf{x}),$$

para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$.

4 Líneas futuras de trabajo

Como continuación directa de los resultados preliminares presentados en la sección anterior, el principal objetivo del trabajo es la definición del operador OWA basado en funciones de grouping [3], así como estudiar su dualidad con respecto a los operadores OWA basados en funciones de overlap. Por otro lado, un segundo objetivo consistirá en medir el nivel de disjuntividad o medida de *orness* [8] de la nueva familia de operadores, teniendo en cuenta las aproximaciones presentadas en la literatura para funciones promedio y para funciones de agregación en general, en este contexto concreto. Por otro lado, teniendo en cuenta que las funciones de overlap no son funciones asociativas en general, teniendo en cuenta resultados previos [4, 7], se podría considerar la recursividad, en concreto, relacionando las secuencias de funciones de overlap así como la nueva familia de operadores con las funciones de agregación extendibles recursivamente. En [7], se utilizan funciones de overlap extendidas de forma recursiva en el proceso de agregación de clustering incremental, y en ese sentido se explorará la agregación incremental desde la perspectiva de la familia de operadores propuesta.

Acknowledgments. Este trabajo ha sido financiado por la Agencia Estatal de Investigación (PID2022-136627NB-I00, MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033/), el Ministerio de Ciencie e Innovación (PID2022-139886NB-I00), el Principado de Asturias (SEK-25-GRU-GIC-24-018) y la Unión Europea (SCIMIN-CRM 101177746).

Disclosure of Interests. No hay conflictos de interés.

References

1. Beliakov, G., Bustince, H., Calvo, T.: A Practical Guide to Averaging Functions, vol. 329. Springer (2016)
2. Bustince, H., Fernández, J., Mesiar, R., Montero, J., Orduna, R.: Overlap functions. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **72**(3-4), 1488–1499 (2010)
3. Bustince, H., Pagola, M., Mesiar, R., Hullermeier, E., Herrera, F.: Grouping, overlap, and generalized bientropic functions for fuzzy modeling of pairwise comparisons. IEEE Transactions on fuzzy systems **20**(3), 405–415 (2011)
4. Cutello, V., Montero, J.: Recursive connective rules. International Journal of Intelligent Systems **14**(1), 3–20 (1999)
5. Gómez, D., Rodriguez, J.T., Montero, J., Bustince, H., Barrenechea, E.: n-dimensional overlap functions. Fuzzy Sets and Systems **287**, 57–75 (2016)
6. Klement, E., Mesiar, R., Pap, E.: Triangular Norms. Trends in Logic, Springer Netherlands (2000)
7. Urio-Larrea, A., Camargo, H., Lucca, G., Asmus, T., Marco-Detchart, C., Schick, L., Lopez-Molina, C., Andreu-Perez, J., Bustince, H., Dimuro, G.P.: Data stream clustering: introducing recursively extendable aggregation functions for incremental cluster fusion processes. IEEE Transactions on Cybernetics **55**(3), 1421–1435 (2025)
8. Yager, R.R.: On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics **18**(1), 183–190 (1988)
9. Yager, R.R.: Extending multicriteria decision making by mixing t-norms and OWA operators. International Journal of Intelligent Systems **20**(4), 453–474 (2005)