Pre-procesamiento de imágenes con suavizados discretos truncados

Pablo Flores-Vidal[1,2][0000-0002-3936-1159], Daniel Gómez[1,2][0000-0001-9548-5781], and Luis Magdalena[3][0000-0003-3673-421X]

[1] Facultad de Estudios Estadísticos, Avda. Puerta de Hierro s/n, Ciudad Universitaria, 28040 Madrid
[2] Instituto Universitario de Estadística y Ciencia de Datos, Facultad de Estudios Estadísticos, Avda. Puerta de Hierro s/n, Ciudad Universitaria, 28040 Madrid
[3] ETSI Informáticos, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, Spain
pflores@ucm.es, dagomez@estad.ucm.es, luis.magdalena@upm.es

Abstract. Este artículo resume los resultados publicados en [1], donde se introduce un marco novedoso para definir operadores de suavizado diseñados intrínsecamente para espacios discretos. Además de presentarse de manera formal las posibles definiciones de operadores clásicos conocidos como Media, Gaussiano, Bilateral, etc, definidos formalmente de manera continua en espacios discretos, este nuevo abordaje permite la definición de suavizados que no son planteables en el marco continuo. En particular, se presenta la 'Media Discreta K-truncada' (que tiene como caso particular la Media Discreta) que no tiene fórmula explícita en el continuo, ni es planteable como problema clásico de optimización. La propuesta se compara evaluando los resultados de detección de bordes en el conjunto de imágenes de segmentación de Berkeley completo (BSDS500), comparando el rendimiento de varios métodos de suavizado con sus respectivos datos de referencia. Además, para evaluar la robustez, los métodos se probaron en una versión ruidosa del conjunto de datos, corrompida con ruido de sal y pimienta. Finalmente, las ventajas en la calidad de detección de bordes resaltan la superioridad de los operadores discretos propuestos sobre las técnicas de suavizado convencionales.

Keywords: Filtros de suavizado · Media discreta · Media discreta k-truncada

1 Motivación

En el análisis de imágenes digitales, el paso de procesamiento inicial es fundamental para garantizar que los algoritmos subsiguientes funcionen correctamente [4,5]. Las técnicas de suavizado destacan como métodos cruciales en este punto [7,8], cuyo objetivo principal es reducir el ruido manteniendo la consistencia espacial dentro de una imagen, a la vez que se preservan detalles estructurales vitales. De manera similar a cómo la calidad de los datos impacta directamente en la precisión del modelo en el análisis de datos convencional, el suavizado es

fundamental en el pre-procesamiento de imágenes para asegurar el éxito de las fases posteriores, como la detección de bordes, la segmentación de imágenes, el reconocimiento de objetos, la clasificación de imágenes, etc.

En este estudio, presentamos un nuevo filtro de suavizado discreto que utiliza optimización con distancia euclidiana $L2^2$ denominada «Media discreta K-truncada», que se basa en minimizar la suma de las distancias dentro de un vecindario de píxeles local. Esta nueva medida se basa en la Media discreta ya presentada en [2,3].

Definición 1. *Sea* $N_k(i,j) = \{x_1, \ldots, x_{|N_k(i,j)|}\}$ *el entorno de radio* k *para el píxel* (i,j). *La función de la* ***Media Discreta*** $\mathcal{T}^{|N_k(i,j)|} \to \{0, \ldots, 255\}$ *se define como:*

$$DMean(x_1, \ldots, x_{|N_k(i,j)|}) = \arg\min_{a \in \mathcal{T}} \sum_{i=1}^{|N_k(i,j)|} (x_i - a)^2$$

Los diferentes métodos de suavizado se aplican a imágenes en escala de grises, tanto en su versión original como en una versión contaminada con ruido de tipo sal y pimienta. Posteriormente, los mapas de bordes resultantes de aplicar el operador de Sobel sobre las imágenes suavizadas se evalúan utilizando el conocido conjunto de Berkeley para segmentación de imágenes (BSDS500 [6]).

2 Una nueva familia de suavizados discretos K-truncados

Mientras que la mediana y media discretas ya presentadas en [1] adaptan exitosamente a sus contrapartidas clásicas continuas, se pueden percibir como traslaciones directas de sus funciones homónimas continuas. Para aprovechar todo el potencial de las propiedades matemáticas de los retículos acotados discretos, proponemos una nueva familia de operadores que surgen de los problemas de optimización que son directamente inabordables (o carecen de una solución cerrada) trabajando directamente en espacios continuos.

En dominios continuos, encontrar una solución analítica exacta para problemas de optimización que involucran no linealidades absolutas o penalizaciones acotadas robustas es una tarea difícil. Un ejemplo clásico es el problema de Fermat-Weber para la mediana continua en dimensiones superiores, que no tiene una fórmula exacta explícita y se basa en aproximaciones numéricas iterativas. Sin embargo, al imponer las restricciones estructurales de un espacio discreto acotado $\mathcal{T}$ (como el espacio de escala de grises donde $\mathcal{T} = \{0, \ldots, 255\}$), estos problemas aparentemente intratables pueden resolverse de manera trivial y óptima mediante una evaluación exhaustiva.

Aprovechando esta optimización discreta, introducimos la versión truncada de nuestro operador media discreta. Al incorporar un parámetro de truncamiento K, limitamos la penalización máxima que puede introducir un valor atípico, lo que proporciona una robustez excepcional frente al ruido, una característica que va más allá de las generalizaciones directas de la teoría de pre-agregaciones continua.

Definición 2. *Bajo las mismas condiciones, dado un umbral de truncamiento* $K > 0$*, el operador* ***Media Discreta K-truncada*** *con* $\mathcal{T}^{|N_k(i,j)|} \to \mathcal{T}$ *se establece como:*

$$DMean^K(x_1, \ldots, x_{|N_k(i,j)|}) = \arg\min_{a \in \mathcal{T}} \sum_{i=1}^{|N_k(i,j)|} \min\{(x_i - a)^2, K^2\}$$

Al igual que con la media discreta estándar, si el proceso de minimización en cualquiera de los operadores truncados produce un conjunto de múltiples valores óptimos, aplicamos la convención de seleccionar el ínfimo del conjunto de mínimos. Cabe destacar que el parámetro de truncamiento K controla la robustez del operador. Cuando K es suficientemente grande (por ejemplo, $K \geq \max(\mathcal{T})$), la función truncada converge naturalmente en la media discreta estándar ya definida en [2].

La transición de operadores discretos clásicos a truncados introduce un cambio fundamental en el panorama de la optimización. En el caso continuo, las funciones objetivo, como la norma $L2$, son estrictamente convexas, lo que garantiza un único mínimo global fácilmente alcanzable mediante métodos basados en gradientes. Sin embargo, la introducción del parámetro de truncamiento K rompe esta convexidad, creando una superficie de coste caracterizada por múltiples mínimos locales y mesetas (donde el gradiente se anula). En un dominio continuo, estas funciones son notoriamente difíciles de optimizar, ya que los algoritmos de búsqueda local suelen quedar atrapados en soluciones subóptimas. Por el contrario, en el dominio discreto $\mathcal{T}$, la naturaleza finita del espacio de búsqueda permite obviar el requisito de convexidad. Al realizar una evaluación exhaustiva sobre el conjunto limitado de posibles valores de intensidad, se garantiza la identificación del verdadero óptimo global, transformando así un problema continuo computacionalmente complejo en una tarea discreta trivial y exacta.

Para una mejor comprensión, proponemos una clasificación de varias funciones de suavizado que se muestran en la Tabla 1.

Table 1. Resumen de las funciones de suavizado para imágenes en escala de grises evaluadas en este estudio.

Suavizado	**Distancia/Ponderación**	**Dominio**
Media clásica	$d(x,a) = L_2^2(x-a) = (x-a)^2$	Continuo (requiere truncamiento)
Gaussiano	L_2 (spatial)	Continuo (requiere truncamiento)
Mediana clásica	$d^{L_1} = \lvert x-a \rvert$	Discreto / Continuo
Bilateral	Spatial and Range (color)	Continuo (requiere truncamiento)
Media recortada	Ordered Statistics	Continuo (requiere truncamiento)
$DMean^K$	$d^{L_2} = \min\{(x-a)^2, K^2\}$	Discreto

3 Experimento, resultados parciales y conclusiones

Para evaluar la calidad de los suavizados, aplicamos el operador de Sobel a 500 imágenes del BSDS500 [6]. Su robustez se evaluó bajo dos condiciones: imágenes originales y corrompidas con un 5% de ruido sal y pimienta. Además, se incluyó una versión sin suavizar como comparación de referencia. El operador Sobel se aplicó a las imágenes suavizadas por cada uno de los filtros: la media clásica, $DMean^K$, bilateral, Gaussiano y la versión sin suavizar. Más allá de su relevancia teórica, estos operadores discretos y truncados ofrecen resultados excepcionales. Nuestras evaluaciones demuestran que estos enfoques superan a las técnicas tradicionales. En concreto, la Media discreta K-truncada para K=90 ($DMean^{90}$) obtuvo la mejor clasificación general en comparaciones entre pares de métodos. El enfoque presentado ofrece una formulación unificada y consistente para diversos métodos de suavizado, y los hallazgos no se limitan a sus aplicaciones específicas en tareas de procesamiento de imágenes de bajo nivel, como el suavizado. Una prometedora línea de investigación sería extender estos métodos a niveles superiores de procesamiento de imágenes, en particular al preprocesamiento de imágenes para el entrenamiento con *deep learning* (CNN).

Acknowledgments. Esta investigación ha sido financiada por el Gobierno de España (ayudas de los proyectos PID2021-122905NB-C21, PID2021-122905NB-C22, PID2023-146540OB-C42 y PID2024-155289NB-I00 financiado por el MICIU /AEI /10.13039/501100011033 / FEDER, EU).

Bibliografía

1. Flores, P., Gomez, D., Magdalena, L.: Pre-aggregation functions in the discrete domain and its applications to image processing. Available at SSRN 6441703 (2026). https://doi.org/10.2139/ssrn.6441703
2. Flores-Vidal, P.: Pre-aggregation functions in the discrete domain and its applications to image processing (source code) (2026), zenodo repository, DOI: 10.5281/zenodo.18493971
3. Flores-Vidal, P., Gómez, D., Magdalena, L.: A discrete Median filter for RGB images. In: Cornejo, M.E., Jiménez Linares, L., Medina, J., Moreno García, J., Ojeda-Aciego, M. (eds.) Libro de Abstracts del XXIII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF 2025). pp. 34–35. Universidad de Cádiz (Dept. Matemáticas), Cádiz, España (2025), https://estylf2025.uca.es/wp-content/uploads/2025/09/BoA_ESTYLF2025.pdf
4. González, R.C., Woods, R.E.: Digital Image Processing, 3rd edition. Pearson (2008)
5. Jain, A.K.: Fundamentals of digital image processing. Prentice-Hall, Inc. (1989)
6. Martin, D., Fowlkes, C., Tal, D., Malik, J.: A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics. In: Proceedings of IEEE International Conf. on Computer Vision. pp. 416–423 (2001)
7. Sobel, I.: History and definition of the so-called "sobel operator", more appropriately named the sobel–feldman operator (2014), technical note
8. Tomasi, C., Manduchi, R.: Bilateral filtering for gray and color images. In: Sixth international conference on computer vision (IEEE Cat. No. 98CH36271). pp. 839–846. IEEE (1998)