Algoritmos heurísticos para el embebido de grafos con signo en estructuras cíclicas

Marcos Robles Rodríguez[1], Sergio Cavero Díaz[2] y Eduardo García Pardo[2]

Grupo GRAFO, Departamento de Informática, Universidad Rey Juan Carlos, Móstoles, Madrid, España
marcos.robles@urjc.es, sergio.cavero@urjc.es, eduardo.pardo@urjc.es
Fecha de inicio: octubre de 2023
Fecha prevista de defensa: febrero de 2027

Resumen En el ámbito de la optimización combinatoria, los *Graph Layout Problem* son problemas en los que el objetivo es encontrar una función biyectiva entre los vértices de un grafo candidato y los vértices de un grafo huésped, de forma que se optimice una función objetivo dada. Esta Tesis Doctoral estudia tres variantes NP-Difíciles de esta familia, CMinSA, CMinMaxSA y CMinVSSA, que modelan situaciones en las que es necesario distribuir elementos con relaciones de afinidad y conflicto en una estructura circular. El ejemplo más ilustrativo es sentar invitados en una mesa redonda de forma que cada persona tenga a sus amigos más cerca que a sus enemigos. Específicamente, el grafo candidato es un grafo con aristas etiquetadas como $+1$ o -1, el grafo huésped es un ciclo, y el objetivo es minimizar los conflictos entre las relaciones positivas y negativas del embebido. Las tres variantes se distinguen por la función de agregación empleada: suma de conflictos, máximo de conflictos por vértice, y número de vértices con al menos un conflicto. En esta Tesis Doctoral se estudian y comparan algoritmos exactos y heurísticos específicos para cada variante, y se observa que debido a la complejidad de estos problemas los algoritmos heurísticos son aproximaciones eficaces, sobre todo en instancias de mayor tamaño en los que los algoritmos exactos son inviables. Los resultados obtenidos en los dos primeros problemas estudiados han sido publicados en *Computers & Operations Research* y *European Journal of Operational Research*, estableciendo nuevos estados del arte para CMinSA y CMinMaxSA respectivamente.

Palabras clave Problemas de embebido de grafos · Metaheurísticas · Heurísticas · Optimización combinatoria · Problemas NP-Difícil

1. Resumen de la investigación

En esta sección se presenta una introducción a la investigación. En primer lugar, se contextualiza la temática de la Tesis Doctoral en la Sección 1.1. En la

[1] Estudiante de doctorado
[2] Director de tesis

Sección 1.2 se enuncia la hipótesis de partida. Las investigaciones previas que avalan la hipótesis se presentan en la Sección 1.3. El objetivo principal y los objetivos secundarios se enuncian en la Sección 1.4. Por último, las aportaciones originales de esta Tesis Doctoral se presentan en la Sección 1.5.

1.1. Contexto

El proyecto de Tesis Doctoral presentado en este documento se enmarca en el ámbito de la optimización combinatoria, concretamente en el diseño de algoritmos heurísticos y metaheurísticos. La optimización es la disciplina matemática dedicada a la búsqueda de la solución óptima dado un problema concreto. Un problema se describe formalmente como una combinación de tres componentes. El primer componente son las variables de decisión, que pueden tomar binarios, continuos o enteros. El segundo componente son las restricciones que definen qué valores y combinaciones de esas variables son válidas para el problema estudiado. En los casos en los que las variables cumplen todas las restricciones se dice que esa solución es factible, y por lo tanto, es una solución válida para ese problema. Estas soluciones se evalúan utilizando una función objetivo, que dado el conjunto de variables devuelve un valor que cuantifica la calidad de esa solución. El objetivo final de un problema de optimización es modificar los valores de las variables de decisión buscando una solución que maximice o minimice la función objetivo, es decir, una solución óptima.

Para abordar los problemas de optimización es posible utilizar técnicas exactas y aproximadas. Las técnicas exactas son procesos que garantizan encontrar la solución óptima para un problema de optimización. Estas técnicas incluyen procesos enumerativos (e.g., *Backtracking*, *Branch and Bound*) o procesos analíticos (e.g., programación dinámica, programación por restricciones). Ambos procesos tienen desventajas prácticas, los procesos enumerativos se basan en evaluar todas las soluciones posibles, requiriendo un gran tiempo de cómputo, y los analíticos requieren una estructura matemática explotable en el problema, lo cual no siempre existe. Por otro lado, las técnicas aproximadas son capaces de operar con tiempos de ejecución reducidos, y sin tener un conocimiento profundo del problema que se está resolviendo [9,17,20]. Sin embargo, las técnicas aproximadas no garantizan la optimalidad de las soluciones encontradas.

Entre las técnicas aproximadas se encuentran las técnicas heurísticas, que emplean ideas sencillas para resolver el problema. En la literatura existen trabajos que especifican en qué casos se deben utilizar las técnicas heurísticas [35]. Concretamente, se identifican los siguientes casos:

- No existe un algoritmo exacto que lo resuelva efectivamente.
- En lugar de resolver el problema, solo se quiere tener una cota.
- No es necesario que la solución sea óptima.
- Se quiere obtener conocimiento sobre el problema.

Un ejemplo de técnica heurística es la búsqueda local, que se asemeja a procesos de descenso del gradiente, en la que se modifican los valores de las

variables de decisión mediante cambios simples, generando una nueva solución con un nuevo valor de función objetivo. Si esa nueva solución es mejor que la original, se reanuda la búsqueda local desde ella, y si no, se deshace el cambio y se prueba con otra modificación. Este proceso resulta inevitablemente en un óptimo local, que tiene el mejor valor de función objetivo respecto a todas las soluciones que se pueden obtener aplicando cualquiera de los cambios considerados. Las técnicas heurísticas no cuentan con mecanismos para escapar de estos óptimos locales, por lo que es común complementarlas con técnicas metaheurísticas, cuyo objetivo es guiar la búsqueda hacia óptimos locales de mayor calidad.

Debido a su capacidad para obtener soluciones de calidad en tiempos de cómputo razonables, las técnicas heurísticas y metaheurísticas son de gran interés para abordar problemas de optimización complejos, especialmente los clasificados como NP-Difícil [16], para que los que no existe un algoritmo capaz de resolverlos en tiempo polinómico. Las aplicaciones reales más comunes en las que se utilizan estas técnicas son los problemas de rutas y transporte [25,34], la localización de instalaciones [33], la planificación de tareas [12,24], o las redes de comunicaciones [14]. Estas aplicaciones destacan por requerir trabajar con un gran número de elementos simultáneamente en un periodo de tiempo reducido, donde las técnicas exactas no son capaces de obtener soluciones de gran calidad.

Esta Tesis Doctoral se centra en una subfamilia de problemas NP-Difícil llamados *Graph Layout Problem*s (GLPs), cuyo objetivo es encontrar una función biyectiva entre los vértices de un grafo candidato y los vértices de un grafo huésped con estructura definida, de forma que se optimice la función objetivo [5,11]. Estos problemas han sido objeto de estudio en la literatura debido a la amplia variedad de aplicaciones prácticas que presentan [10,11,13,22].

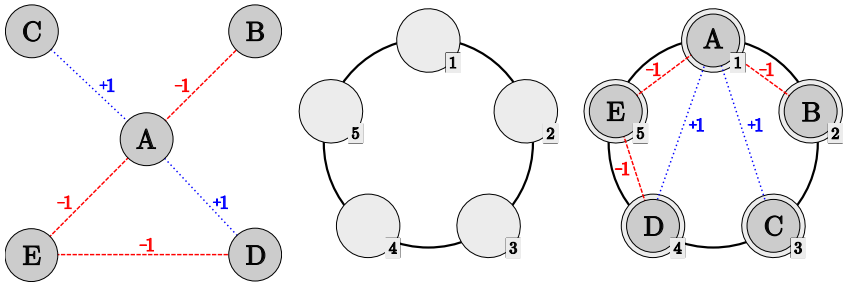
En estos problemas se trabaja simultáneamente con dos grafos. El grafo candidato se denota como $G_C = (V_C, E_C)$, donde V_C simboliza el conjunto de vértices y E_C representa el conjunto de aristas del grafo G_C. De manera similar, el grafo huésped se denota como $G_H = (V_H, E_H)$, donde V_H y E_H representan el conjunto de vértices y el conjunto de aristas del grafo G_H, respectivamente. Este proceso, conocido como embebido o etiquetado, consiste formalmente en la definición de una función biyectiva que establece una correspondencia entre los vértices del conjunto V_C y los vértices del conjunto V_H. Los GLP que suelen despertar mayor interés son aquellos en los que el grafo huésped G_H posee una estructura definida. En particular, los grafos huésped más estudiados en las últimas décadas son el camino [15], el ciclo [28], el árbol [1] y la rejilla [4].

De todos los GLP existentes en la literatura, esta Tesis Doctoral se centra en tres variantes del mismo GLP, conocido como *Cyclic Minimum Sitting Arrangement* (CMinSA) [28]. En los problemas derivados del CMinSA se tiene que el grafo candidato es un grafo con signos, en el que las aristas se etiquetan con valores +1 o -1 [36]. Un ejemplo de grafo con signo se muestra en la Figura 1a, en la que se tienen los vértices A, B, C, D y E; y se representan las relaciones de adyacencia positiva como líneas azules, y las negativas como líneas rojas. El vértice A tiene los adyacentes positivos C y D, y los adyacentes negativos B y E; E y D son también adyacentes negativos. Por otro lado, el grafo huésped es un

grafo en el que todos los vértices forman un único ciclo, llamado grafo ciclo. Se muestra un ejemplo en la Figura 1b, en la que se tienen cinco vértices etiquetados 1, 2, 3, 4 y 5. Ambos grafos tienen una clara relación con estructuras reales. En cuanto a los grafos con signos, estos han sido estudiados extensamente en la literatura, incluyendo ámbitos como la psicología, la física, la química, la biología y la geometría [36]. Por su parte, los grafos ciclo se pueden utilizar para representar situaciones como carreteras de circunvalación, mesas en las que se sientan una serie de invitados, topologías de ordenadores o circuitos de actividades.

El objetivo específico del CMinSA es asignar los vértices del grafo candidato a los vértices del grafo huésped de forma que cada vértice tenga más cerca a sus adyacentes positivos que a sus adyacentes negativos. Cada caso en el que un vértice tenga un adyacente negativo más cerca que uno positivo se contabiliza como un conflicto. La función objetivo del CMinSA contabiliza el número total de conflictos e intenta minimizarlo [31].

Por ejemplo, si el grafo con signos G_1 (Figura 1a) representa las relaciones de amistad y enemistad entre los vértices, y el grafo ciclo H_1 (Figura 1b) representa una mesa en la que hay que sentar a los invitados, cada invitado debe tener a sus amigos más cerca que sus enemigos. Una posible solución, también llamada embebido en este problema, sería φ_1 (Figura 1c). En este caso se puede observar que se tienen dos conflictos. El primero de ellos ocurre en el vértice A, ya que tiene a su adyacente negativo E más cerca que su adyacente positivo D. El segundo ocurre en el vértice D, en el que se da la misma situación, el adyacente negativo E está más cerca que el adyacente positivo A.



(a) Grafo con signos G_1. (b) Grafo ciclo H_1. (c) Embebido φ_1 de G_1 en H_1.

Figura 1: Ejemplos de grafo con signos, grafo ciclo y solución.

En esta Tesis Doctoral se estudian tres variantes de este problema. En concreto, en cada variante, varía la función de agregación utilizada. La primera variante es la de la suma, llamada CMinSA [28,31], en la que se suman todos los conflictos de la solución. Para el ejemplo de la Figura 1c, el valor del CMinSA es 2, ya que los vértices A y D tienen cada uno un conflicto. La segunda variante, llamada *Cyclic Min-Max Sitting Arrangement* (CMinMaxSA) [29], calcula la

función objetivo como el máximo entre los conflictos de los vértices individuales, y para el ejemplo anterior el valor del CMinMaxSA es 1, dado que se calcula como el máximo entre 1 y 1. La última variante estudiada se denomina *Cyclic Minimum Vertex Sum Sitting Arrangement* (CMinVSSA), y contabiliza el número de vértices con uno o más conflictos; para la solución del ejemplo, el valor del CMinVSSA es 2 dado que los vértices A y D tienen conflictos. Es importante destacar que aunque los problemas sean muy similares son problemas distintos, cada uno cuenta con unas propiedades estructurales distintas y es necesaria una aproximación específica para cada uno. A nivel práctico, representan situaciones distintas. La variante de la suma puede resultar en una solución en la que un vértice acumule todos los conflictos, la variante del máximo no permite esto, obligando a que todos los vértices tengan una situación más equitativa. Por último, la variante del conteo ignora cuántos conflictos tienen los vértices, enfocándose únicamente en que haya el menor número de vértices con conflictos, resultando en situaciones más positivas para la mayoría a costa de un gran número de conflictos en unos pocos vértices.

1.2. Hipótesis

El desarrollo de la Tesis Doctoral se basa en el método científico. El primer paso es identificar el problema, estudiar su interés científico y revisar los trabajos relacionados. A continuación, se plantea una hipótesis de partida, cuya validación guía el desarrollo de uno o varios algoritmos.

En esta Tesis Doctoral se trabaja con el problema de CMinSA y sus variantes. Los trabajos existentes en la literatura demuestran que el CMinSA es un problema de interés científico contrastado. Además, sus variantes presentan también interés científico, dado que cada una modela un objetivo específico. Respecto a los trabajos relacionados, se ha comprobado en la literatura que el uso de algoritmos aproximados es esencial para estos problemas, por lo que el foco central será el desarrollo de estos algoritmos. Consecuentemente, la hipótesis de esta Tesis Doctoral se define como:

> "*Los algoritmos heurísticos y metaheurísticos son una aproximación efectiva para el problema de CMinSA y sus derivados*".

1.3. Investigaciones previas que avalan la hipótesis

El primer trabajo relativo a los problemas estudiados en esta Tesis Doctoral se remonta a 2011. En ese año, Kermarrec y Thraves [19] formularon el problema en el trabajo "*Can everybody sit closer to their friends than to their enemies?*". En ese trabajo se planteó como un problema de decisión, en el que se quería saber si era posible que todos los vértices tuvieran a sus adyacentes positivos más cerca que los adyacentes negativos en un espacio de l-dimensiones. Además, se hizo una propuesta para el caso de 2-dimensiones, que se corresponde con un grafo huésped de tipo camino. Este trabajo teórico fue extendido en 2012

[8], en un trabajo que demostró que era un problema NP-Completo y amplió la propuesta ya existente.

El *Sitting Arrangement* se formuló como un problema de optimización en el año 2015 [23]. El objetivo dejó de ser un problema de decisión para convertirse en un problema de minimización del número de conflictos (MinSA). El trabajo estudiaba el problema en el grafo huésped camino, y proponía un algoritmo *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* (GRASP) y un constructivo voraz. En 2020 [21] se hizo una propuesta para el mismo problema que explotaba sus propiedades teóricas, específicamente, la agrupación de adyacentes positivos en la solución evitando que hubiera adyacentes negativos entre ellos.

De manera paralela a los trabajos que se desarrollan en el grafo huésped camino, se propusieron en 2018 [2] y 2019 [1] dos estructuras de grafo huésped adicionales. En 2018 se propuso la estructura de ciclo, y los autores extrajeron propiedades estructurales para esta variante. En 2019 se propuso la estructura de *R-Tree* como grafo huésped.

El primer estudio del MinSA en el ciclo (CMinSA) se desarrolló en 2022 [28] motivado, en primer lugar, por el trabajo de 2018 en el que se formulaba el problema en el ciclo; y en segundo lugar, por la tendencia de adaptar GLPs del grafo huésped camino al grafo huésped ciclo para representar nuevas situaciones [3,18,26]. En el trabajo de 2022 se hizo una adaptación directa de la propuesta de la variante del grafo huésped camino a la del ciclo, y se validó que ambos problemas eran distintos y, por lo tanto, ambos optimizaban objetivos diferentes.

Todos estos trabajos reflejan que estos problemas tienen interés científico, dado que han sido abordados desde múltiples perspectivas y para tres grafos huésped distintos. Por otro lado, también evidencian que las aproximaciones heurísticas son efectivas para la resolución de estos problemas.

1.4. Objetivos

Identificada la hipótesis, se definen una serie de objetivos con el fin de contrastarla.

Objetivo Principal El objetivo principal de esta Tesis Doctoral es:

> "*Diseñar e implementar algoritmos heurísticos, utilizados junto con técnicas metaheurísticas, para abordar el problema de optimización del CMinSA y sus variantes.*"

En cada variante del CMinSA en la que se trabaja se tienen unos objetivos específicos, que se enuncian como:

Objetivos específicos

1. Revisar el estado del arte de problemas similares y formalizar matemáticamente cada variante del CMinSA, estudiando de manera exhaustiva sus propiedades estructurales.

2. Modelar cada variante para su resolución computacional, incluyendo el desarrollo de modelos de programación entera para *solvers* exactos como marco de comparación.
3. Proponer, diseñar e implementar algoritmos heurísticos y metaheurísticos específicos y efectivos para cada variante, explotando sus propiedades estructurales particulares.
4. Comparar experimentalmente los algoritmos propuestos con el estado del arte sobre conjuntos de instancias comunes, validando estadísticamente los resultados.
5. Publicar los resultados en revistas indexadas JCR Q1/Q2 y congresos internacionales de referencia (EURO, MIC, ICVNS).

1.5. Aportación original

Las propuestas asociadas a esta Tesis Doctoral realizan aportaciones desde distintos puntos de vista.

En primer lugar, las propuestas algorítmicas constituyen una aportación a la literatura de los GLP. Las propiedades estructurales explotadas en cada variante tienen puntos en común con otros GLP, permitiendo reutilizar componentes en propuestas para esos problemas. Por ejemplo, existen GLP en la literatura en los que se minimiza un máximo [6,32], al igual que en el CMinMaxSA, por lo que las ideas desarrolladas para esta variante son extrapolables a dichos problemas.

En segundo lugar, se desarrollan los primeros modelos matemáticos para la familia CMinSA en cualquiera de sus variantes, implementados en solvers como Gurobi, Hexaly o CPLEX, que sirven como marco de comparación. Cabe destacar que, a pesar de la abundancia de propuestas exactas para GLP con grafo huésped camino en la literatura, no existe ningún modelo matemático para GLP con grafo huésped ciclo.

Por último, el conjunto de instancias de grafos con signos disponible era muy limitado, lo que podía sesgar los resultados. En esta tesis se generan nuevas instancias con propiedades estructurales distintas, especialmente robustas, ya que se generan a partir de instancias que reflejan situaciones reales [27]. Algunos ejemplos son las instancias de relaciones sociales en el proceso de votación en Wikipedia, o la confianza entre los distintos nodos de Bitcoin, además de las instancias Harwell-Boeing, que reflejan grafos relativos a aplicaciones de ingeniería.

2. Metodología y plan de trabajo

En esta sección se presentan la metodología empleada para el desarrollo de esta Tesis Doctoral en la Sección 2.1 y el estado actual de la investigación y el plan de trabajo pendiente en la Sección 2.2.

2.1. Metodología

En esta Tesis Doctoral se sigue un proceso iterativo e incremental basado en el método científico. El proceso es *iterativo* porque cada variante del CMinSA

se aborda mediante un ciclo completo de hipótesis, diseño, implementación y validación. Es *incremental* porque el conocimiento adquirido en cada iteración se reutiliza y extiende en las siguientes. Cada iteración consta de las siguientes etapas:

1. **Análisis del problema:** Estudio de las propiedades estructurales de la variante, revisión de trabajos relacionados y recopilación de instancias de referencia.
2. **Formulación de la hipótesis:** Identificación del enfoque algorítmico candidato basándose en los resultados previos y en las características del problema.
3. **Diseño e implementación:** Desarrollo del algoritmo propuesto, incluyendo los operadores de vecindad, estructuras de datos y, cuando proceda, el modelo matemático para *solver* exacto.
4. **Experimentación y contraste:** Evaluación sobre las instancias de referencia y comparación con el estado del arte. Si los resultados no validan la hipótesis, se regresa a la etapa anterior con mayor información, refinando el diseño.
5. **Publicación:** Los resultados que validan la hipótesis se documentan y envían a revistas o congresos de referencia.

2.2. Estado de la Investigación y Plan de Trabajo

La Tesis Doctoral se encuentra actualmente en su tercer año de desarrollo. Se han publicado dos artículos en revistas JCR [30,31] y dos artículos SJR [28,29]. Además, se ha participado en tres congresos internacionales y cinco nacionales. En el contexto de esta Tesis Doctoral se ha realizado una estancia de investigación en Montreal, Canadá, junto con el profesor Daniel Aloise, en la que se desarrolló un estudio metodológico relativo a los métodos heurísticos. A continuación se detallan los hitos que marcan el cumplimiento del objetivo principal de la tesis, esto es, el diseño de algoritmos heurísticos y metaheurísticos efectivos para las tres variantes del CMinSA:

- **Primer estudio del CMinSA:** Publicación de "*BVNS for the Minimum Sitting Arrangement Problem in a Cycle*" en el *International Conference on Variable Neighborhood Search* (LNCS, 2022) [28]. Primer trabajo sobre el CMinSA, en el que se propone una adaptación del algoritmo BVNS desarrollado para la variante del grafo huésped camino, validando que ambas variantes son estructuralmente distintas.
- **Propuesta heurística para el CMinSA:** Publicación de "*Multi-armed Bandit for the Cyclic Minimum Sitting Arrangement Problem*" en *Computers & Operations Research* 179 (2025) [31]. Se propone una hiperheurística basada en el método Multi-Armed Bandit que combina tres procedimientos constructivos con una búsqueda local VND, obteniendo resultados estadísticamente superiores al algoritmo anterior.
- **Propuesta heurística para el CMinMaxSA:** Publicación de "*Variable Formulation Search for the Cyclic Min-Max Sitting Arrangement Problem*"

en ICVNS 2025 (LNCS) [29], y "*Mathematical formulation and heuristic methods for the min-max sitting arrangement problem in the cycle*" en *European Journal of Operational Research* (2026) [30]. Se proponen algoritmos metaheurísticos específicos para el CMinMaxSA junto con los primeros modelos matemáticos para la familia CMinSA, estableciendo un nuevo estado del arte para la variante del máximo.
- **Propuesta heurística para el CMinVSSA (en curso):** Diseño de algoritmos heurísticos para la variante del conteo, con resultados previstos para publicación en revista JCR Q1/Q2 en 2026.

Las tareas pendientes hasta la finalización de la Tesis Doctoral son las siguientes:

- **Cierre experimental del CMinVSSA (2026, julio-septiembre):** Finalización de la validación experimental, comparación estadística con el estado del arte y redacción del artículo correspondiente para su envío a una revista JCR Q1/Q2.
- **Redacción de la memoria de Tesis Doctoral (2026, octubre-diciembre):** Integración de los resultados de las tres variantes en el documento final de Tesis.
- **Depósito y defensa (Febrero de 2027):** Depósito de la memoria y defensa pública de la Tesis Doctoral.

Completado el estudio de las tres variantes, se procederá a la redacción y defensa de la Tesis Doctoral, prevista para febrero de 2027.

3. Relevancia

Por último, se presenta la relevancia de la investigación desarrollada en esta Tesis Doctoral a nivel científico en la Sección 3.1 y su aplicación y transferencia en la sociedad en la Sección 3.2.

3.1. Relevancia Científica

Los problemas de embebido de grafos destacan en el campo de la optimización combinatoria debido a su gran capacidad para modelar situaciones reales y la posibilidad de generalizar sus aproximaciones para otros tipos de problemas [11]. Por ejemplo, los problemas de rutas como el *Traveling Salesman Problem* o el *Vehicle Routing Problem* se pueden modelar como un GLP en un ciclo, dado que las rutas empiezan y terminan en el mismo punto. Los problemas de asignación de trabajos también se pueden representar como GLPs, dado que los turnos disponibles se pueden representar como un grafo huésped camino y los trabajos como el grafo candidato. Debido a esta flexibilidad, los GLPs cuentan con un gran interés en la literatura.

La investigación asociada al CMinSA es relevante por los conocimientos que aporta sobre el embebido de grafos con signos en grafos ciclo. Por un lado,

los grafos con signos tienen un amplio recorrido en la literatura científica, con aplicaciones en psicología, física, química, biología y geometría [36]. Sin embargo, los trabajos que los emplean en problemas de optimización se limitan a la familia CMinSA, dejando un gran hueco en la literatura. Por otra parte, los GLPs surgieron originalmente de la necesidad de asignar componentes electrónicos en placas base minimizando intersecciones en el cableado [7], y han derivado en aplicaciones como la asignación de contenedores software en infraestructuras virtualizadas [13] o la gestión de tráfico en redes mediante métricas como el *Bandwidth* [4] o el *Cutwidth* [18]. La combinación de ambos elementos en las variantes del CMinSA abre un nuevo frente de investigación que permite modelar situaciones de manera más detallada que los grafos simples tradicionales, como las relaciones sociales.

3.2. Aplicación y Transferencia a la Sociedad

Los modelos estudiados en esta Tesis Doctoral tienen aplicación directa en problemas reales en los que es necesario distribuir elementos teniendo en cuenta relaciones positivas y negativas entre ellos:

- **Planificación urbana y organización de espacios:** la distribución de negocios o instalaciones en una calle o recinto circular puede modelarse directamente como un CMinSA, agrupando negocios afines y separando los competidores directos.
- **Organización de eventos y gestión de personas:** la asignación de invitados a una mesa circular con relaciones de afinidad y conflicto es la aplicación más representativa del problema, con aplicaciones en protocolo, mediación y dinámicas de grupo.
- **Redes sociales y análisis de comunidades:** los grafos con signos modelan relaciones de amistad o enemistad, confianza o desconfianza, o afinidad política. Las instancias reales utilizadas en esta tesis provienen de redes de votación en Wikipedia y redes de confianza entre nodos de Bitcoin, lo que conecta directamente los resultados con aplicaciones en análisis de redes sociales digitales.
- **Diseño de circuitos y redes de comunicaciones:** los GLPs con grafo huésped ciclo son aplicables al diseño de topologías en anillo, comunes en redes de telecomunicaciones, donde minimizar latencias máximas entre nodos relacionados es crítico.

Agradecimientos Esta Tesis Doctoral ha sido parcialmente financiada por las siguientes subvenciones: PID2021-125709OA-C22; CIAICO/2021/224; C1PREDOC24-047 and M2988; TEC-2024/COM-404; TSI-100930-2023-3 (MCA07); and MCA06.

Referencias

1. Becerra, R., Caro, C.T.: On the sitting closer to friends than enemies problem in trees and an intersection model for strongly chordal graphs. arXiv preprint arXiv:1911.11494 (2019)

2. Benítez, F., Aracena, J., Caro, C.T.: The sitting closer to friends than enemies problem in the circumference. arXiv preprint arXiv:1811.02699 (2018)
3. Cavero, S., Pardo, E.G., Duarte, A.: A general variable neighborhood search for the cyclic antibandwidth problem. Computational Optimization and Applications **81**(2), 657–687 (2022)
4. Cavero, S., Pardo, E.G., Duarte, A.: Efficient iterated greedy for the two-dimensional bandwidth minimization problem. European Journal of Operational Research **306**(3), 1126–1139 (2023)
5. Cavero, S., Pardo, E.G., Duarte, A., Martí, R.: Graph layout problems. In: Handbook of Heuristics, pp. 1321–1351. Springer (2025)
6. Cavero, S., Pardo, E.G., Laguna, M., Duarte, A.: Multistart search for the cyclic cutwidth minimization problem. Computers & Operations Research **126**, 105116 (2021). https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cor.2020.105116
7. Cohoon, J., Sahni, S.: Heuristics for backplane ordering. Journal of VLSI and computer systems **2**(1-2), 37–60 (1987)
8. Cygan, M., Pilipczuk, M., Pilipczuk, M., Wojtaszczyk, J.O.: Sitting closer to friends than enemies, revisited. In: International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science. pp. 296–307. Springer (2012)
9. Duarte, A., Mladenovic, N., Sánchez-Oro, J., Todosijevic, R.: Variable Neighborhood Descent. In: Handbook of Heuristics, pp. 341–367. Springer International Publishing (Aug 2018)
10. Dujmović, V., Wood, D.R.: On linear layouts of graphs. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science **6**(2), 339–358 (2004)
11. Díaz, J., Petit, J., Serna, M.: A survey of graph layout problems. ACM Computing Surveys **34**(3), 313–356 (Sep 2002)
12. Emmons, H., Vairaktarakis, G.: Flow shop scheduling: theoretical results, algorithms, and applications, vol. 182. Springer Science & Business Media (2012)
13. Fischer, A., Botero, J.F., Beck, M.T., De Meer, H., Hesselbach, X.: Virtual network embedding: A survey. IEEE Communications Surveys & Tutorials **15**(4), 1888–1906 (2013)
14. Frei, C., Faltings, B.: Bandwidth allocation heuristics in communication networks. 1ères Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications, ALGOTEL'99 pp. 53–58 (1999)
15. Garcia, C.G., Pérez-Brito, D., Campos, V., Martí, R.: Variable neighborhood search for the linear ordering problem. Computers & operations research **33**(12), 3549–3565 (2006)
16. Garey, M.R., Johnson, D.S.: Computers and intractability, vol. 174. freeman San Francisco (1979)
17. Gigerenzer, G.: Why heuristics work. Perspectives on psychological science **3**(1), 20–29 (2008)
18. Jain, P., Srivastava, K., Saran, G.: Minimizing cyclic cutwidth of graphs using a memetic algorithm. Journal of Heuristics **22**(6), 815–848 (2016). https://doi.org/10.1007/s10732-016-9319-4
19. Kermarrec, A.M., Thraves, C.: Can everybody sit closer to their friends than their enemies? In: International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science. pp. 388–399. Springer (2011)
20. Michalewicz, Z., Fogel, D.B.: How to solve it: modern heuristics. Springer Science & Business Media (2013)
21. Pardo, E.G., García-Sánchez, A., Sevaux, M., Duarte, A.: Basic variable neighborhood search for the minimum sitting arrangement problem. Journal of Heuristics **26**(2), 249–268 (Apr 2020)

22. Pardo, E.G., Martí, R., Duarte, A.: Linear layout problems. In: Handbook of Heuristics, pp. 1025–1049. Springer (2018)
23. Pardo, E.G., Soto, M., Thraves, C.: Embedding signed graphs in the line. Journal of Combinatorial Optimization **29**(2), 451–471 (2015)
24. Rajendran, C.: Heuristics for scheduling in flowshop with multiple objectives. European journal of operational research **82**(3), 540–555 (1995)
25. Ralphs, T.K., Kopman, L., Pulleyblank, W.R., Trotter, L.E.: On the capacitated vehicle routing problem. Mathematical programming **94**(2), 343–359 (2003)
26. Ren, J., Hao, J.K., Rodriguez-Tello, E., Li, L., He, K.: A new iterated local search algorithm for the cyclic bandwidth problem. Knowledge-Based Systems **203**, 106136 (2020). `https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.knosys.2020.106136`
27. Robles, M., Cavero, S.: Signed Graph Collection (2025), `https://github.com/MRoblesR/signed-graphs`
28. Robles, M., Cavero, S., Pardo, E.G.: BVNS for the minimum sitting arrangement problem in a cycle. In: International Conference on Variable Neighborhood Search. pp. 82–96. Springer (2022)
29. Robles, M., Cavero, S., Pardo, E.G.: Variable formulation search for the cyclic min-max sitting arrangement problem. In: International Conference on Variable Neighborhood Search. pp. 134–149. Springer (2025)
30. Robles, M., Cavero, S., Pardo, E.G.: Mathematical formulation and heuristic methods for the min-max sitting arrangement problem in the cycle. European Journal of Operational Research (2026)
31. Robles, M., Cavero, S., Pardo, E.G., Cordón, O.: Multi-armed bandit for the cyclic minimum sitting arrangement problem. Computers & Operations Research **179**, 107034 (2025). `https://doi.org/10.1016/j.cor.2025.107034`
32. Rodriguez-Tello, E., Romero-Monsivais, H., Ramirez-Torres, G., Lardeux, F.: Tabu search for the cyclic bandwidth problem. Computers & Operations Research **57**, 17–32 (2015). `https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cor.2014.11.013`
33. Shen, Z.J.M., Zhan, R.L., Zhang, J.: The reliable facility location problem: Formulations, heuristics, and approximation algorithms. INFORMS Journal on Computing **23**(3), 470–482 (2011)
34. Wren, A.: Heuristics ancient and modern: Transport scheduling through the ages. Journal of Heuristics **4**, 87–100 (1998)
35. Zanakis, S.H., Evans, J.R.: Heuristic "optimization": Why, when, and how to use it. Interfaces **11**(5), 84–91 (1981)
36. Zaslavsky, T.: Signed graphs. Discrete Applied Mathematics **4**(1), 47–74 (1982)