Implicaciones difusas a través de suma ordinal de operadores

Roberto G. Aragón[1], Celia Cordovilla[12], Pascual Jara[2], and Jesús Medina[1]

[1] Departmento de Matemáticas. Universidad de Cádiz. España*
{roberto.aragon,jesus.medina}@uca.es
[2] Departmento de Álgebra. Universidad de Granada. España
{ccordovilla,pjara}@ugr.es

Resumen Este trabajo introduce una nueva construcción de suma ordinal para familias de aplicaciones definidas sobre conjuntos parcialmente ordenados, inspirada en la suma de Clifford. En este sentido, se ha evidenciado que, en el ámbito de los sistemas distribuidos y computación en el borde, surge la imperante necesidad de incorporar información local. En consecuencia, la presente investigación se enfoca en analizar las condiciones necesarias y suficientes para garantizar que la suma de los operadores en cuestión resulte en una implicación difusa. Para ello, se examina la preservación de propiedades fundamentales como la monotonía, las condiciones de frontera, la propiedad de intercambio, entre otras.

Keywords: ordinal sum, lattice sum, general operators, fuzzy implications

La computación en el borde (*edge computing*) y los sistemas distribuidos constituyen ejemplos importantes de entornos en los que la información global de un sistema debe obtenerse a partir del procesamiento y la interacción de componentes locales. En este tipo de escenarios, cada subsistema dispone de información parcial, por lo que resulta necesario desarrollar metodologías que permitan combinar los resultados obtenidos localmente. Esta necesidad motiva el análisis exhaustivo tanto de las estructuras algebraicas que pueden surgir de las diversas estructuras locales, así como de nuevas herramientas matemáticas capaces de modelar adecuadamente dicha agregación local junto con las diferentes metodologías para su integración en el sistema global.

Desde una perspectiva algebraica, esto requiere analizar las estructuras que pueden surgir a partir de la combinación de distintas estructuras locales, así como mecanismos que permitan integrarlas en un único sistema. En este contexto, los autores de [7] introdujeron una generalización de la conocida suma ordinal de Clifford para conjuntos parcialmente ordenados y retículos, denominada *suma de*

* Parcialmente financiado por el proyecto PID2022-137620NB-I00 con el apoyo de MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y FEDER, UE, proyecto FEDER-UCA-2024-A2-04 con el apoyo de Programa Operativo FEDER Andalucía 2021-2027 y de Consejería de Universidad, Investigación e Innovación, Junta de Andalucía.

conjuntos parcialmente ordenados basada en retículos. La principal novedad de esta construcción radica en que el conjunto de índices deja de estar restringido a una cadena (conjunto totalmente ordenado) y pasa a ser un retículo arbitrario. Esta extensión amplía considerablemente la flexibilidad de la construcción original y permite modelar situaciones en las que las relaciones entre las distintas estructuras locales presentan una organización más compleja que un orden lineal.

Una vez establecida una metodología para combinar estructuras ordenadas, surge de manera natural la cuestión de cómo agregar operadores definidos sobre dichas estructuras. Más concretamente, resulta de interés determinar qué propiedades de los operadores locales se preservan al pasar a la estructura global obtenida mediante los distintos mecanismos de agregación. En este sentido, las normas triangulares (t-normas) han desempeñado tradicionalmente un papel fundamental debido a sus excelentes propiedades algebraicas y a su estrecha relación con la lógica difusa. Sin embargo, aunque las t-normas se definieron inicialmente sobre intervalos acotados, otras lógicas, como por ejemplo la multivaluada se desarrolla sobre retículos acotados que no son necesariamente conjuntos totalmente ordenados. Esta circunstancia ha motivado el estudio de extensiones de las t-normas a estructuras ordenadas más generales, como los trabajos presentados en [5,9,12,14]. Posteriormente, en [6], se introdujo un mecanismo que permite generalizar la suma ordinal de t-normas al marco de las sumas ordinales basadas en retículos, proporcionando así una herramienta para construir operadores globales a partir de familias de operadores locales.

No obstante, en muchas aplicaciones prácticas las hipótesis tradicionales asociadas a las t-normas, tales como la asociatividad o la conmutatividad, pueden resultar restrictivas. En consecuencia, ha surgido un creciente interés por considerar tipos de operadores que relajen algunas de estas condiciones permitiendo modelar interacciones del contexto de forma más precisa y sensible. En esta dirección, diversos autores han estudiado sumas ordinales de operadores monótonos más generales, como las uninormas y las pseudonormas, obteniendo resultados relevantes [8,11]. En un entorno más general en [1] se abordó el estudio de sumas ordinales de operadores arbitrarios definidos sobre una familia de retículos y construidas a partir de la suma basada en retículos introducida en [7]. Dicho trabajo extiende los resultados obtenidos en [6] y proporciona una construcción general que permite generar operadores sobre la estructura agregada a partir de operadores definidos localmente. Asimismo, se analizó qué propiedades algebraicas son preservadas por esta nueva construcción y bajo qué condiciones pueden garantizarse.

Por otra parte, las implicaciones difusas constituyen una de las operaciones fundamentales de la lógica difusa, desempeñando un papel esencial en el razonamiento aproximado, así como en diversos mecanismos de inferencia deductiva e inductiva. Su importancia se refleja también en la gran variedad de aplicaciones en las que intervienen, entre las que destacan la resolución de ecuaciones difusas, la morfología matemática difusa, las medidas difusas, el procesamiento de imágenes y otros ámbitos relacionados con la representación y el tratamien-

to de información imprecisa. Tradicionalmente, las implicaciones difusas se han definido como aplicaciones $I\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que satisfacen determinadas condiciones de monotonía y frontera, prestándose especial atención a las implicaciones residuadas derivadas de t-normas continuas por la izquierda. Sin embargo, este marco clásico se encuentra restringido al intervalo unidad [3], lo que puede limitar su capacidad para modelar contextos más generales basados en estructuras ordenadas arbitrarias.

En este trabajo nos centramos precisamente en dicho contexto general, considerando operadores definidos sobre conjuntos parcialmente ordenados. Mediante la agregación de estructuras a través de mecanismos de suma ordinal basada en retículos [1,6,9], nuestro objetivo principal consiste en analizar si existen condiciones necesarias y/o suficientes que garanticen que la suma ordinal de operadores sea una implicación difusa. Además de analizar diferentes propiedades tales como monotonía en ambos argumentos, condiciones de frontera, propiedad de la identidad, del orden o de intercambio entre otras, se preservan de los operadores locales en dicha suma ordinal. Para ello, introducimos una nueva construcción de suma ordinal para familias de aplicaciones definidas sobre conjuntos parcialmente ordenados inspirada en la suma ordinal de Clifford, extendiendo la propuesta recientemente presentada en [15].

Finalmente, este trabajo abre diversas líneas de investigación futuras. Entre ellas, destaca el estudio de nuevas definiciones de sumas generales de operadores que permitan obtener una suma que sí cumpla todas las condiciones de frontera que satisface una implicación difusa. Asimismo, se investigarán condiciones suficientes para establecer que dicha suma de operadores sea la implicación residuada correspondiente a una suma ordinal de operadores continuos a izquierda, ampliando así los resultados clásicos presentados en [2,4,13]. Por último, se explorarán posibles aplicaciones de estos resultados en distintas herramientas matemáticas basadas en estructuras ordenadas, como el análisis de conceptos formales difusos en el paradigma multiadjunto [10].

Referencias

1. R. G. Aragón, P. Jara, and J. Medina. General and left-continuous operators on lattice-based sums. *Fuzzy Sets and Systems*, 528:109706, 2026.
2. M. Baczyński. Residual implications revisited. notes on the smets–magrez theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 145(2):267–277, 2004.
3. M. Baczyński and B. Jayaram. Fuzzy implications from fuzzy logic operations. In *Fuzzy Implications*, pages 39–107. Springer, 2008.
4. M. Carbonell and J. Torrens. Continuous r-implications generated from representable aggregation functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 161(17):2276–2289, 2010.
5. A. Dvořák, M. Holčapek, and J. Paseka. On ordinal sums of partially ordered monoids: A unified approach to ordinal sum constructions of t-norms, t-conorms and uninorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 446:4–25, 2022. New Trends in Aggregation.
6. M. El-Zekey. Lattice-based sum of t-norms on bounded lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 386:60–76, 2020.
7. M. El-Zekey, J. Medina, and R. Mesiar. Lattice-based sums. *Information Sciences*, 223:270–284, 2013.

8. J. Kalafut and A. Mesiarová-Zemánková. Decomposition of pseudo-uninorms with continuous underlying functions via ordinal sum. *Information Sciences*, 690:121573, 2025.
9. J. Medina. Characterizing when an ordinal sum of t-norms is a t-norm on bounded lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 202:75–88, 2012.
10. J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and J. Ruiz-Calviño. Formal concept analysis via multi-adjoint concept lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(2):130–144, 2009.
11. A. Mesiarová-Zemánková. Ordinal sums of representable uninorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 308:42–53, 2017. Theme: Aggregation Operations.
12. Y. Ouyang, H.-P. Zhang, and B. De Baets. Ordinal sums of triangular norms on a bounded lattice. *Fuzzy Sets and Systems*, 408:1–12, 2021. Aggregation Operators.
13. D. Ruiz and J. Torrens. Residual implications and co-implications from idempotent uninorms. *Kybernetika*, 40(1):21–38, 2004.
14. S. Saminger-Platz, E. P. Klement, and R. Mesiar. On extensions of triangular norms on bounded lattices. *Indagationes Mathematicae*, 19(1):135–150, 2008.
15. X. Yan and H. Zhou. Weak implications as ordinal sums of fuzzy implications and co-implications. *Information Sciences*, 718:122395, 2025.