Agregación de contextos formales en entornos difusos*

Roberto G. Aragón, Jesús Medina, and Samuel Molina-Ruiz

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, España
samuel.molina@uca.es

Resumen Esta propuesta de tesis doctoral se centra en el estudio de los enlaces como herramienta formal para la agregación de contextos formales en entornos difusos. El trabajo se enmarca en el Análisis de Conceptos Formales, una teoría matemática orientada a la extracción y representación estructurada de conocimiento a partir de bases de datos relacionales. En particular, la tesis aborda el problema de combinar la información procedente de distintas bases de datos sin modificar la información contenida originalmente en cada una de ellos. Para ello, se estudia la noción de enlace, introducida en el caso clásico y extendida posteriormente a ciertos marcos difusos, y se desarrolla su tratamiento dentro del marco de los retículos de conceptos multiadjuntos.

El objetivo principal de la tesis es construir una teoría de enlaces en entornos difusos, estudiar sus propiedades algebraicas y desarrollar procedimientos computacionales para su obtención. Hasta el momento se han obtenido varios resultados: la introducción de la noción de enlace multiadjunto, el análisis de casos particulares relevantes, el estudio de la agregación de contextos mediante sumas basadas en enlaces y el diseño de algoritmos para calcular todos los enlaces entre dos contextos. El trabajo restante se orienta hacia la optimización computacional de dichos algoritmos, la agregación de contextos que comparten objetos o atributos, la obtención de enlaces guiados por información externa y la aplicación de estas ideas a la descomposición de contextos.

Keywords: Análisis de Conceptos Formales · Enlaces · Retículos de conceptos · Marcos multiadjuntos · Agregación de contextos · Lógica difusa

* Partially supported by the project PID2022-137620NB-I00 funded by MICIU/AEI/10.13039/501100011033 and FEDER, UE, Project FEDER-UCA-2024-A2-04 funded by Programa Operativo FEDER Andalucía 2021-2027 and by Consejería de Universidad, Investigación e Innovación, Junta de Andalucía and DGP_PRED_2024_01455 funded by the Junta de Andalucía/CUII and by FSE+.

1. Datos de la propuesta

Doctorando	Samuel José Molina Ruiz
Título propuesto	Agregación de contextos formales en entornos difusos
Directores	Dr. Jesús Medina Moreno y Dr. Roberto García Aragón
Departamento	Departamento de Matemáticas
Universidad	Universidad de Cádiz
Fecha de inicio	5 de septiembre de 2024
Defensa prevista	2028
Correo electrónico	`samuel.molina@uca.es`

2. Resumen de la investigación

El Análisis de Conceptos Formales (FCA, por sus siglas en inglés) es una teoría matemática ampliamente utilizada para la representación y extracción de conocimiento en bases de datos relacionales. Esta teoría permite estudiar relaciones entre objetos y atributos y obtener representaciones jerárquicas de la información presente en una base de datos. La información se organiza mediante conceptos formales, cada uno de los cuales está formado por una extensión y una intensión. La extensión recoge el conjunto de objetos que comparten determinadas características, mientras que la intensión contiene los atributos comunes a dichos objetos. El conjunto de todos los conceptos formales puede organizarse mediante una estructura de retículo, que permite representar relaciones jerárquicas entre conceptos y facilita la identificación de patrones y reglas en los datos. Con el fin de abordar situaciones en las que la información es gradual o imprecisa, se han desarrollado diversas extensiones difusas del FCA, entre las que destaca el marco multiadjunto, objeto de estudio de esta tesis.

El problema central abordado en esta investigación es el de la agregación de contextos. En muchas situaciones, la información relevante no se encuentra en una única base de datos, sino distribuida entre distintas fuentes. Un objetivo natural es entonces combinar dichas fuentes para obtener un contexto mayor que conserve la información inicial y, al mismo tiempo, permita estudiar nuevas relaciones entre los objetos y atributos de los contextos originales. Dentro del FCA, una herramienta clásica para este propósito es la noción de enlace, o *bond* en inglés. Un enlace entre dos contextos relaciona los objetos del primer contexto con los atributos del segundo de manera que la información de esta nueva relación provenga de información existente en los contextos originales. Formalmente, la relación debe satisfacer que sus filas sean intensiones del segundo contexto y sus columnas sean extensiones del primero.

La tesis parte de la observación de que, aunque los enlaces han sido estudiados en el caso clásico y en algunos entornos difusos, no existía previamente un desarrollo sistemático de esta noción dentro del marco multiadjunto. Esta ausencia es relevante porque el marco multiadjunto ofrece una mayor flexibilidad que otras extensiones difusas, al permitir asociar distintos operadores lógicos a distintos pares objeto–atributo. Por tanto, introducir y estudiar enlaces en este

marco supone un paso necesario para disponer de herramientas de agregación compatibles con contextos difusos más generales. Asimismo, aunque la literatura ha analizado los enlaces principalmente como morfismos entre contextos [29], su papel como herramienta formal para la agregación permanece todavía insuficientemente explorado.

La hipótesis de partida es que los enlaces proporcionan una herramienta formal adecuada para agregar contextos multiadjuntos preservando la información de los contextos originales. Además, se considera que el estudio de los enlaces puede contribuir también al problema inverso, es decir, la descomposición de un contexto en subcontextos más pequeños, cuya información pueda ser calculada localmente y posteriormente reconstruida o agregada.

3. Antecedentes y estado actual del tema

El Análisis de Conceptos Formales, abreviado habitualmente como FCA por sus siglas en inglés, es una teoría matemática de gran utilidad para estudiar la estructura jerárquica interna que existe en la información contenida en las bases de datos relacionales [21,36]. Desde su introducción como una reestructuración de la teoría de retículos, esta teoría ha tenido un gran impacto en el análisis de datos, permitiendo representar jerarquías de conceptos, detectar dependencias entre variables, eliminar información redundante y extraer conocimiento relevante de forma estructurada. De esta forma, el FCA trata estas bases de datos como un contexto: una terna compuesta de un conjunto de objetos, un conjunto de atributos y una relación binaria entre ellos. Además, la relación de un contexto induce una conexión de Galois [17] que permite definir la noción de concepto, que representa una unidad elemental de información dentro de un contexto. Cada concepto formal está compuesto por una extensión y una intensión. La extensión está formada por todos los objetos que comparten un determinado conjunto de atributos, mientras que la intensión contiene exactamente los atributos comunes a dichos objetos. De este modo, cada concepto describe una agrupación maximal de objetos y atributos relacionados entre sí, proporcionando una representación estructurada del conocimiento contenido en los datos. El conjunto de todos los conceptos formales asociados a un contexto posee la estructura de un retículo completo [16], lo que permite describir rigurosamente la organización jerárquica de la información.

Entre las generalizaciones de esta teoría al ambiente difuso [22,37] queremos resaltar la basada en retículos residuados y la basada en álgebras multiadjuntas. Una de las primeras fue introducida por R. Bělohlávek [12] y usa la estructura de retículo residuado como conjunto de valores de verdad. Los contextos en este ambiente seguirán siendo una terna compuesta por un conjunto de objetos, un conjunto de atributos y una relación entre ellos, con la importante distinción de que esta relación será difusa, es decir, para cada par objeto–atributo, la relación les asigna un valor dentro del retículo residuado que refleja el grado en que el objeto tiene el atributo considerado. La segunda generalización aplica la filosofía del paradigma multiadjunto [31,32,33] a fin de proporcionar un marco de

trabajo general que es capaz de acomodar diferentes enfoques difusos dados en la literatura, incluido el mencionado anteriormente. En este marco de trabajo, los triples adjuntos son los operadores básicos de cálculo y, por lo tanto, podemos considerar fácilmente un ambiente no conmutativo y no asociativo, que nos permite establecer diferentes grados de preferencia a los conjuntos de objetos y de atributos del contexto. Más información sobre estos operadores se encuentra en [14,15].

Dentro de la teoría del FCA, encontramos dos líneas de investigación relacionadas: la agregación y la descomposición de contextos. La agregación de contextos nos permite estudiar bases de datos independientes y obtener relaciones entre estas con el fin de sacar conclusiones generales que incluyen los objetos y atributos de ambas, intentando siempre no alterar la información existente. Por otro lado, la descomposición de contextos tiene como objetivo dividir una base de datos, generalmente de gran tamaño, en subtablas que facilitan su tratamiento. A partir de estas subtablas, podemos obtener información local que requiere menos computación, y mediante los procesos mencionados anteriormente, esta información local se puede agregar para obtener conocimiento relevante sobre todo el conjunto global. Ambas perspectivas resultan especialmente relevantes en escenarios donde la información se encuentra distribuida entre distintas fuentes o dispositivos. En esta línea de investigación se han producido avances significativos tanto en el entorno clásico [18,19] como en el marco multiadjunto [8,9,10,11].

Existen varias herramientas ideadas para la agregación de contextos. En esta tesis nos centraremos en la agregación de contextos disjuntos vía enlaces. En el caso clásico, un enlace entre dos contextos se define como una relación cuyas filas son intensiones del segundo contexto y cuyas columnas son extensiones del primero. Esta condición garantiza que la relación utilizada para conectar ambos contextos emplea únicamente información procedente de los contextos originales. De manera más general, los enlaces relacionan dos contextos disjuntos de tal manera que la información de estos contextos se preserva, sin distorsionar la información original. Esta noción fue trabajada por B. Ganter y R. Wille en el ambiente clásico en relación con productos subdirectos [21] y ha sido extendida al ambiente difuso de los retículos residuados mediante la noción de L-enlace [28,29]. Esta noción no había sido extendida previamente al marco multiadjunto, lo cual se planteó como el primer objetivo de esta tesis. Este objetivo ya se ha llevado a cabo en [3,5], introduciendo la noción de enlace multiadjunto.

Hasta ahora, el estudio de los L-enlaces se ha centrado principalmente en identificar conexiones entre distintos contextos, en lugar de combinarlos, así como en explorar variaciones de esta noción mediante el uso de diferentes operadores de derivación definidos sobre el contexto [23,25,26,29]. Sin embargo, la obtención de estos enlaces resulta compleja, por lo que es esencial determinar mecanismos y algoritmos para calcularlos. El estudio que se ha hecho sobre esta problemática se centra en la noción del producto directo de contextos, que requiere la ley de la doble negación. Además, en [23,28], los autores demuestran que no todos los enlaces se pueden obtener de esta manera. Por tanto, se propone como segundo objetivo explorar nuevos procedimientos computacionales que permitan generar

todos los enlaces entre dos contextos. Este objetivo también se ha realizado en [4], proponiendo un algoritmo para la obtención de todos los enlaces en el caso clásico y el marco difuso basado en retículos residuados.

Dos aspectos importantes destacan dentro de la noción de L-enlace. Por un lado, esta noción se introduce entre contextos asociados al mismo retículo residuado, y por otro, estos contextos no deben compartir objetos ni atributos. El primer aspecto se ha comenzado a estudiar en [24] y servirá de guía para definir una variación de los enlaces multiadjuntos para conectar contextos asociados a diferentes marcos multiadjuntos. El segundo aspecto no ha sido planteado dentro de la bibliografía sobre enlaces, pero sí existen otras nociones, como la de *gluings* [21], que abarcan este problema, aunque no han sido estudiadas dentro de un ambiente difuso.

Por último, todos los resultados obtenidos se contextualizarán en el ambiente de la descomposición de contextos. La implementación de algoritmos de descomposición de contextos permite reducir la complejidad de cómputo y obtener la información de forma más eficiente. El estudio de la descomposición de contextos en el ámbito clásico ha sido desarrollado por D. Dubois y H. Prade [19,18] en relación con la teoría de posibilidad, obteniendo herramientas para calcular subcontextos independientes. Estas herramientas han sido extendidas al ambiente difuso en [8,9,11,10], siempre con el enfoque de encontrar subcontextos independientes. Como último objetivo de esta tesis, se plantea analizar métodos alternativos para descomponer contextos usando los resultados obtenidos dentro de la agregación de contextos. Dado que la descomposición puede entenderse como un proceso inverso a la agregación, los algoritmos obtenidos para esta última pueden resultar útiles para abordar la primera.

4. Objetivos

El objetivo general de la tesis es desarrollar una teoría formal de enlaces para la agregación de contextos en entornos difusos, con especial atención a la noción de enlace y al marco multiadjunto, y estudiar tanto sus propiedades algebraicas como sus aspectos computacionales.

Este objetivo general se desglosa en los siguientes objetivos específicos:

1. Introducir una extensión de la noción clásica de enlace al marco de los retículos de conceptos multiadjuntos.
2. Comparar la noción de enlace multiadjunto con las nociones previas de enlace clásico y L-enlace, identificando en qué sentido las generaliza.
3. Estudiar propiedades fundamentales de los enlaces multiadjuntos y analizar casos particulares relevantes, como los enlaces definidos mediante relaciones constantemente 0 o constantemente 1.
4. Analizar cómo los enlaces pueden utilizarse para agregar contextos y cómo dicha agregación afecta a la estructura del retículo de conceptos del contexto resultante.
5. Diseñar algoritmos para calcular enlaces entre contextos.

6. Estudiar la agregación de contextos que no son disjuntos, es decir, contextos que pueden compartir objetos o atributos.
7. Desarrollar métodos para obtener enlaces particulares guiados por información externa, evitando la necesidad de calcular todos los enlaces posibles.
8. Aplicar los resultados obtenidos al problema de la descomposición de contextos, entendida como un proceso opuesto a la agregación.
9. Implementar todas las funcionalidades teóricas para trabajar de forma automática con enlaces en entornos clásicos y multiadjuntos.

5. Resultados obtenidos hasta el momento

La tesis cuenta ya con varios resultados aceptados para publicación. En primer lugar, se ha introducido la noción de enlace multiadjunto [3]. Este resultado constituye la base de la tesis, ya que permite trasladar al marco multiadjunto la idea clásica de enlace entre contextos. La definición se formula a partir de las intensiones de los objetos difusos y de las extensiones de los atributos difusos, de modo que la relación que conecta dos contextos preserva la información conceptual de los contextos originales. Además, se prueban unas primeras propiedades sobre cuándo las relaciones constantemente 0 o constantemente 1 definen enlaces multiadjuntos, entendiéndose 0 y 1 como los elementos mínimo y máximo del conjunto ordenado correspondiente.

En segundo lugar, se ha estudiado el uso de los enlaces multiadjuntos como herramienta de agregación. En [5] se analiza la relación entre la nueva definición y las nociones previas de enlace clásico y L-enlace, mostrando que la noción multiadjunta las generaliza. También se estudian cómo los enlaces multiadjuntos definidos por las relaciones constantemente 0 o constantemente 1 mencionados anteriormente dan lugar al producto cartesiano o a la suma horizontal de contextos. Este análisis se completa en [7] donde se introduce otro método de agregación basado en la suma vertical de retículos de conceptos. Asimismo, se estudia la relación entre los retículos de conceptos de los contextos originales y los del contexto agregado, analizando cómo se preserva la información inicial y qué nuevas estructuras aparecen como consecuencia del proceso de agregación.

En tercer lugar, se han diseñado algoritmos para calcular todos los enlaces entre dos contextos tanto en el caso clásico como en un ambiente difuso [4]. El planteamiento parte de la caracterización de los enlaces como relaciones cuyas filas y columnas son intensiones y extensiones, respectivamente. De esta forma, el algoritmo se centra en obtener de manera recursiva todas las relaciones que satisfacen esta condición y calcular así todos los enlaces entre los contextos. De esta forma, se han introducido algoritmos tanto en el caso clásico como en el marco de retículos residuados. Además se demuestra la corrección del algoritmo, en el sentido de que se obtienen únicamente enlaces, y su completitud, en el sentido de que todo enlace entre los contextos considerados es generado por el algoritmo.

Finalmente, a raíz de una visita de investigación realizada por Domingo López-Rodríguez (Universidad de Málaga) a la Universidad de Cádiz, se ha iniciado una nueva línea de trabajo centrada en la optimización computacional de

los algoritmos de obtención de enlaces. Esta investigación parte de la misma filosofía empleada en los algoritmos presentados en [4], pero incorpora nuevas estrategias orientadas a reducir el espacio de búsqueda aprovechando propiedades estructurales de los propios enlaces. Esta colaboración pretende beneficiarse de la experiencia previa del grupo de investigación de la Universidad de Málaga en el desarrollo de herramientas computacionales para el Análisis Formal de Conceptos. En particular, dicho grupo es responsable del desarrollo del paquete `fcaR`, una de las herramientas de referencia para el trabajo con FCA clásico y con extensiones difusas basadas en retículos residuados dentro del entorno `R` [13]. El paquete cuenta actualmente con más de 50.000 descargas acumuladas, lo que refleja su amplia utilización por parte de la comunidad científica.

Estos resultados han dado lugar, hasta el momento, a dos artículos publicados en revistas indexadas, a un capítulo de libro publicado y otros dos capítulos de libro actualmente en proceso de producción. Además, existen trabajos adicionales en proceso relacionados con la optimización de los algoritmos de obtención de enlaces, la agregación de contextos no disjuntos y el desarrollo de nuevas formas de agregación basadas en información externa. También se prevé aplicar los resultados obtenidos al estudio de la descomposición de contextos, entendida como un proceso complementario a la agregación.

Una lista de todas las publicaciones y comunicaciones realizadas hasta la fecha se encuentra en la Sección 7.

6. Metodología y plan de trabajo

La investigación desarrollada en esta tesis sigue la metodología habitual en matemáticas, combinando el estudio bibliográfico, el desarrollo teórico de nuevas herramientas y la posterior implementación de código. En primer lugar, resulta fundamental realizar una revisión sistemática de la literatura relacionada con el FCA, sus extensiones difusas y las distintas nociones de enlace propuestas en la bibliografía. Este estudio permite identificar resultados previos, detectar problemas abiertos y analizar qué herramientas pueden extenderse al marco multiadjunto.

A partir de este análisis se introducen nuevas definiciones y se estudian sus propiedades mediante técnicas procedentes de la teoría de retículos, las conexiones de Galois y la lógica difusa. Cuando los resultados teóricos lo requieren, estos se complementan con el diseño e implementación de algoritmos que permiten analizar estas nociones en ejemplos concretos. Asimismo, la experimentación computacional facilita la visualización de los resultados.

Esta actividad investigadora se complementa con la participación en seminarios especializados, escuelas de verano, congresos nacionales e internacionales y estancias de investigación en centros de reconocido prestigio. Del mismo modo, los resultados obtenidos se difunden mediante la elaboración de artículos científicos para revistas especializadas y contribuciones presentadas en congresos del área.

El trabajo comenzó durante el curso académico 2023/2024, en el contexto del Trabajo Fin de Máster. Durante este periodo se realizó un estudio bibliográfico sobre FCA, agregación de contextos y enlaces, así como un primer análisis de la posible extensión de esta noción al marco multiadjunto. Los resultados preliminares dieron lugar a una primera definición de enlace multiadjunto, que fue presentada en el congreso ESTYLF 2024.

La investigación doctoral comenzó oficialmente el 5 de septiembre de 2024. Durante el primer año se profundizó en el estudio de esta nueva noción, obteniéndose los primeros resultados teóricos y comenzando la elaboración de un artículo de investigación. Asimismo, se presentaron contribuciones en congresos nacionales e internacionales y se participó en la escuela de verano SFLA organizada por la European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT).

Durante el segundo año, actualmente en curso, se ha continuado desarrollando resultados sobre los enlaces multiadjuntos y sus aplicaciones a la agregación de contextos. Este trabajo ha dado lugar a la publicación de los primeros artículos derivados de la tesis y a la continuación de la actividad de difusión científica mediante nuevas contribuciones en congresos. Además, se ha iniciado una investigación sobre la optimización de algoritmos para la obtención de enlaces junto con Domingo López-Rodríguez.

Para el tercer año se prevé continuar las líneas de investigación actualmente abiertas. Asimismo, está prevista una estancia de investigación en la Pavol Jozef Šafárik University de Košice junto a investigadores de referencia como Ľubomír Antoni, Ondrej Krídlo y Stanislav Krajči. Durante esta estancia se pretende profundizar en el estudio de mecanismos para la obtención de enlaces a partir de información externa, siguiendo las líneas de trabajo desarrolladas en [27,30].

Finalmente, el cuarto año estará dedicado a completar las líneas de trabajo iniciadas durante el doctorado, publicar los resultados obtenidos y preparar la memoria de tesis doctoral para su defensa.

7. Difusión de resultados

Los resultados de la tesis han sido difundidos en revistas, capítulos de libro y congresos nacionales e internacionales. En relación directa con la línea de enlaces y agregación de contextos, se han desarrollado y publicado los siguientes trabajos:

- Dos artículos publicados en revistas JCR:
  - *Computing Bonds Between Formal Contexts*, Mathematical Methods in the Applied Sciences (Q1).
  - *Context-based Sum via Multi-adjoint Bonds*, Fuzzy Sets and Systems (Q1).
- Un capítulo de libro publicado:
  - *The Notion of Bond in the Multi-adjoint Concept Lattice Framework*, CAEPIA 2024.
- Dos capítulos de libro aceptados y pendientes de publicación definitiva:
  - *Vertical sum of concept lattices via bonds*, ESCIM 2025.

· *On the aggregation of contexts with common attributes*, ESCIM 2026.

Asemás, se han presentado comunicaciones en los siguientes congresos:

- *Aggregating contexts using multi-adjoint bonds*, 12th International Joint Conference on Rough Sets (IJCRS 2026).
- *On the aggregation of contexts with common attributes*, 17th European Symposium on Computational Intelligence and Mathematics (ESCIM 2026).
- *Relating two different contexts through multi-adjoint bonds*, 2nd International Joint Conference on Conceptual Knowledge Structures (CONCEPTS 2025).
- *Vertical sum of concept lattices via bonds*, 16th European Symposium on Computational Intelligence and Mathematics (ESCIM 2025).
- *Enlaces en el análisis de conceptos multiadjuntos*, Herramientas formales difusas para Razonamiento No canónico (HARMONIC 2025).
- *Suma de contextos basada en enlaces multiadjuntos*, XXIII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF 2025).
- *Towards the aggregation of multi-adjoint concept lattices*, 1st International Joint Conference on Conceptual Knowledge Structures (CONCEPTS 2024).
- *The notion of bond in the multi-adjoint concept lattice framework*, XXII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF 2024).
- *Enlazando retículos de conceptos multiadjuntos*, Congreso de la Real Sociedad Matemática Española (RSME 2024).

Asimismo, el doctorando ha participado en la organización de varios congresos internacionales y nacionales relacionados con lógica difusa, estructuras conceptuales y computación inteligente, incluyendo CONCEPTS24, ESCIM25, ESTYLF25, ESCIM26, IJCRS26. Esta experiencia ha contribuido a su formación investigadora y a la integración de su trabajo en la comunidad científica.

8. Relevancia científica y posibilidades de transferencia

El FCA ha demostrado ser una herramienta útil para la extracción de conocimiento y el análisis de datos en numerosos ámbitos de aplicación [20,34,35]. La estructura de retículo asociada a los conceptos formales permite representar relaciones jerárquicas entre conjuntos de datos, identificar patrones, detectar dependencias y facilitar la toma de decisiones. Estas características han favorecido la aparición de aplicaciones en áreas tan diversas como la web semántica, los sistemas de recomendación y los sistemas de apoyo a la toma de decisiones.

De esta forma, la agregación y la descomposición de contextos constituyen problemas especialmente relevantes. En muchas aplicaciones reales la información se encuentra distribuida entre distintas bases de datos o se genera de manera descentralizada por diferentes dispositivos, departamentos o agentes. Disponer de herramientas que permitan combinar estas fuentes de información preservando su estructura conceptual puede facilitar el análisis conjunto de los datos y la obtención de conocimiento global. Del mismo modo, la posibilidad de descomponer contextos complejos o de gran tamaño en subcontextos más pequeños

permite reducir costes computacionales y realizar análisis locales que posteriormente pueden integrarse para reconstruir una visión completa del problema.

Asimismo, la tesis presenta posibilidades de transferencia a problemas reales a través de la colaboración existente entre el grupo de investigación M·CIS de la Universidad de Cádiz y la empresa Grupo Energético de Puerto Real (GEN). Esta colaboración ha dado lugar a diversos proyectos de investigación orientados a la optimización de instalaciones fotovoltaicas, la detección automática de anomalías y el mantenimiento predictivo [1,2]. En este contexto, una de las perspectivas futuras de la tesis consiste en analizar cómo las técnicas de agregación y descomposición desarrolladas pueden contribuir a integrar conocimiento procedente de diferentes fuentes de información y facilitar la extracción de conocimiento en problemas reales del sector energético. De este modo, los resultados obtenidos durante la tesis complementarán las herramientas ya desarrolladas por el grupo y favorecer su transferencia a aplicaciones industriales relacionadas con la monitorización y predicción de fallos en instalaciones fotovoltaicas.

9. Conclusiones y trabajo futuro

La tesis propone una línea de investigación centrada en los enlaces como herramienta formal para la agregación de contextos en entornos difusos. Los resultados obtenidos hasta el momento muestran que la noción de enlace puede extenderse al marco multiadjunto y que dicha extensión permite estudiar de forma rigurosa la agregación de contextos difusos preservando la información conceptual de los contextos originales.

El trabajo ya realizado incluye la definición de enlace multiadjunto, el estudio de propiedades fundamentales, el análisis de contextos agregados mediante enlaces y el diseño de algoritmos para calcular todos los enlaces entre dos contextos en distintos marcos formales. Estos resultados constituyen una base sólida para abordar las líneas de investigación actualmente abiertas.

El trabajo futuro se orientará hacia cuatro direcciones principales. En primer lugar, se estudiarán optimizaciones computacionales de los algoritmos ya desarrollados, teniendo en cuenta que el número de enlaces puede crecer exponencialmente con el tamaño de los contextos. Esta línea está en desarrollo junto a Domingo López-Rodríguez. En segundo lugar, se abordará la agregación de contextos no disjuntos, con el fin de tratar situaciones en las que las bases de datos comparten objetos o atributos, siguiendo el trabajo ya presentado en [6]. En tercer lugar, se investigará la obtención de enlaces particulares guiados por información externa junto a Ľubomir Antoni, para evitar la generación exhaustiva de todos los enlaces posibles. Finalmente, se estudiará la aplicación de estas herramientas al problema de la descomposición de contextos.

Referencias

1. R. G. Aragón, F. Chacón-Gómez, M. E. Cornejo, J. Medina, and E. Ramírez-Poussa. Fault detection and predictive maintenance of photovoltaic facilities.

International Journal of Information Technology & Decision Making (IJITDM), 24(07):1971–2003, 2025.
2. R. G. Aragón, M. E. Cornejo, J. Medina, J. Moreno-García, and E. Ramírez-Poussa. Decision support system for photovoltaic fault detection avoiding meteorological conditions. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 21(03):911–932, 2022.
3. R. G. Aragón, J. Medina, and S. Molina-Ruiz. The notion of bond in the multi-adjoint concept lattice framework. In *Advances in Artificial Intelligence*, pages 243–253, Cham, 2024. Springer Nature Switzerland.
4. R. G. Aragón, J. Medina, and S. Molina-Ruiz. Computing bonds between formal contexts. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2026.
5. R. G. Aragón, J. Medina, and S. Molina-Ruiz. Context-based sum via multi-adjoint bonds. *Fuzzy Sets and Systems*, page 109771, 2026.
6. R. G. Aragón, J. Medina, and S. Molina-Ruiz. On the aggregation of contexts with common attributes. *Studies in Computational Intelligence*, 2026. In press.
7. R. G. Aragón, J. Medina, and S. Molina-Ruiz. Vertical sum of concept lattices via bonds. *Studies in Computational Intelligence*, 2026. In press.
8. R. G. Aragón, J. Medina, and E. Ramírez-Poussa. Reducing concept lattices by means of a weaker notion of congruence. *Fuzzy Sets and Systems*, 418:153–169, 2021.
9. R. G. Aragón, J. Medina, and E. Ramírez-Poussa. Factorizing formal contexts from closures of necessity operators. *Computational and Applied Mathematics*, 43(3):124, 2024.
10. R. G. Aragón, J. Medina, and E. Ramírez-Poussa. Decomposition of contexts into independent subcontexts based on thresholds. *Computational and Applied Mathematics*, 44(7):340, 2025.
11. R. G. Aragón, J. Medina, and E. Ramírez-Poussa. Independent subcontexts and blocks of concept lattices. definitions and relationships to decompose fuzzy contexts. *Fuzzy Sets and Systems*, 509:109345, 2025.
12. R. Bělohlávek. Lattice generated by binary fuzzy relations (extended abstract). In *4th Intl Conf on Fuzzy Sets Theory and Applications*, page 11, 1998.
13. P. Cordero, M. Enciso, D. López-Rodríguez, and Á. Mora. fcar, formal concept analysis with r. *The R Journal*, 14:341–361, 2022. https://rjournal.github.io/.
14. M. E. Cornejo, J. Medina, and E. Ramírez. A comparative study of adjoint triples. *Fuzzy Sets and Systems*, 211:1–14, 2013.
15. M. E. Cornejo, J. Medina, and E. Ramírez-Poussa. Multi-adjoint algebras versus non-commutative residuated structures. *International Journal of Approximate Reasoning*, 66:119–138, 2015.
16. B. A. Davey and H. A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, 2 edition, 2002.
17. K. Denecke, M. Erné, and S. L. Wismath, editors. *Galois Connections and Applications*. Mathematics and Its Applications. Springer Dordrecht, 2004.
18. D. Dubois, F. D. de Saint-Cyr, and H. Prade. A possibility-theoretic view of formal concept analysis. *Fundamenta Informaticae*, 75(1-4):195–213, 2007.
19. D. Dubois and H. Prade. Possibility theory and formal concept analysis: Characterizing independent sub-contexts. *Fuzzy Sets and Systems*, 196:4–16, 2012.
20. B. Ganter, G. Stumme, and R. Wille. Formal concept analysis, foundations and applications. *Lecture Notes in Computer Science*, 01 2005.
21. B. Ganter and R. Wille. *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations*. Springer, 2 edition, 2024.

22. P. Hajek. *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Kluwer Academic Publishers, 1998.
23. J. Konecny. Antitone l-bonds. In A. Laurent, O. Strauss, B. Bouchon-Meunier, and R. R. Yager, editors, *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, pages 71–80, Cham, 2014. Springer International Publishing.
24. J. Konecny. Bonds between l-fuzzy contexts over different structures of truth-degrees. In J. Baixeries, C. Sacarea, and M. Ojeda-Aciego, editors, *Formal Concept Analysis*, pages 81–96, Cham, 2015. Springer International Publishing.
25. J. Konecny and M. Ojeda-Aciego. Isotone l-bonds. *CEUR Workshop Proceedings*, 1062:153–162, 2013.
26. J. Konecny and M. Ojeda-Aciego. On homogeneous l-bonds and heterogeneous l-bonds. *International Journal of General Systems*, 45(2):160–186, 2016.
27. O. Krídlo, Ľ. Antoni, and S. Krajči. Selection of appropriate bonds between l-fuzzy formal contexts for recommendation tasks. *Information Sciences*, 606:21–37, 2022.
28. O. Krídlo, S. Krajči, and M. Ojeda-Aciego. l-bonds vs extents of direct products of two l-fuzzy contexts. In *Proceedings of Concept Lattices and Applications (CLA)*, pages 70–79, 2010.
29. O. Krídlo, S. Krajči, and M. Ojeda-Aciego. The category of l-chu correspondences and the structure of l-bonds. *Fundamenta Informaticae*, 115:297–325, 2012.
30. O. Krídlo, D. López-Rodríguez, L. Antoni, P. Eliaš, S. Krajči, and M. Ojeda-Aciego. Connecting concept lattices with bonds induced by external information. *Information Sciences*, 648:119498, 2023.
31. J. Medina. Multi-adjoint property-oriented and object-oriented concept lattices. *Information Sciences*, 190:95–106, 2012.
32. J. Medina and M. Ojeda-Aciego. Multi-adjoint t-concept lattices. *Information Sciences*, 180(5):712–725, 2010.
33. J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and J. Ruiz-Calviño. Formal concept analysis via multi-adjoint concept lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(2):130–144, 2009.
34. J. Poelmans, D. I. Ignatov, S. O. Kuznetsov, and G. Dedene. Formal concept analysis in knowledge processing: A survey on applications. *Expert Systems with Applications*, 40(16):6538–6560, 2013.
35. U. Priss. Formal concept analysis in information science. *Annual Review of Information Science and Technology*, 40(1):521–543, 2006.
36. R. Wille. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts. In *Ordered Sets*, pages 445–470. Springer Netherlands, 1982.
37. L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, 1965.