Modus Tollens en el contexto de las uninormas discretas

Isabel Aguiló[1][0000−0002−4434−3203], Pilar Fuster-Parra[1][0000−0003−2929−1625], and Juan Vicente Riera[1][0000−0002−0878−8301]

Soft Computing, Image Processing and Aggregation Research Group (SCOPIA), Artificial Intelligence Research, Institute of the Balearic Islands (IAIB), Health Research Institute of the Balearic Islands (IdISBa), Mathematics and Computer Science Department, University of the Balearic Islands, Spain
{isabel.aguilo,pilar.fuster,jvicente.riera}@uib.es

Resumen Este trabajo es un resumen del trabajo publicado en 2026 en la revista Axioms en el año 2026 titulado *Modus Tollens in the Setting of Discrete Uninorms* para su presentación en la Multiconferencia CAEPIA 26 (ESTYLF 2026) KeyWorks.

Keywords: Modus Tollens · Uninormas discretas · Implicación difusa discreta · RU-implicaciones discretas · Negación en una cadena finita.

1. Motivación

La lógica difusa, desde su introducción por Zadeh en 1965 [1], se ha convertido en una herramienta fundamental para modelar el razonamiento impreciso. Un enfoque central es la adaptación de las reglas clásicas de inferencia al contexto difuso [2]. Entre ellas, la regla del *Modus Tollens* (que en lógica clásica establece que de $A \to B$ y $\neg B$ se puede inferir $\neg A$) ha suscitado una atención considerable. Su análogo difuso se estudia generalmente en términos de una desigualdad funcional que involucra distintos operadores. Esta desigualdad, conocida como la condición de Modus Tollens difuso, se expresa para todo $x, y \in [0, 1]$ como:

$$T(N(y), I(x, y)) \leq N(x),$$

donde T es una norma triangular, I es una función de implicación difusa y N es un operador de negación difusa [3].

Esta formulación recoge el espíritu del Modus Tollens en lógica difusa, con grados de verdad que reflejan la naturaleza gradual de la inferencia [4]. Los investigadores han propuesto generalizar las t-normas y t-conormas mediante la noción de *uninormas*, estudiando esta desigualdad funcional para distintas familias de esta clase de operadores [5].

Sin embargo, muchas aplicaciones del mundo real requieren representaciones discretas. En campos como la teoría de la decisión, los sistemas basados en conocimiento y el razonamiento cualitativo, la información suele darse en escalas

ordinales en lugar de valores numéricos precisos, modeladas habitualmente por cadenas finitas del tipo $L_n = \{0, 1, \cdots, n\}$.

De forma análoga al caso continuo, en este entorno discreto se han estudiado los distintos operadores clásicos (t-normas, t-conormas, uninormas, funciones de negación, funciones de implicación, etc.) y ciertas reglas de inferencia, dando lugar a resultados análogos o adaptaciones apropiadas al entorno discreto [6,7,8]. Siguiendo este enfoque, en este artículo investigamos el U-Modus Tollens utilizando uninormas conjuntivas discretas (en lugar de t-normas discretas), negaciones discretas y funciones de implicación discretas:

$$U(N(y), I(x, y)) \leq N(x), \text{para todo } \ x, y \in L_n$$

En este artículo publicado en [9], se estudia esta regla de inferencia para funciones de implicación residuales derivadas de las dos principales familias de uninormas discretas ($\mathcal{U}_{\text{mín}}$, idempotentes ($\mathcal{U}_{ide}$)). Además, se investiga qué propiedades deben satisfacer estos operadores y se proporcionan algunas caracterizaciones del U-Modus Tollens en este contexto.

2. Preliminares y resultados esenciales

Recordemos algunos conceptos básicos.

Definición 1. *[7] Una* uninorma discreta*, o simplemente una uninorma en L_n, es una aplicación $U : L_n^2 \to L_n$ que cumple las siguientes propiedades: asociatividad, conmutatividad y monotonía no decreciente respecto a cada argumento. Además, existe un elemento $e \in L_n$, denominado* elemento neutro*, tal que $U(e, x) = x$ para todo $x \in L_n$.*

Esta clase de operadores extienden tanto las t-normas discretas como las t-conormas discretas y suelen denotarse como $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle$. Además, para cualquier uninorma U definida en L_n, se cumple que $U(0, n) \in \{0, n\}$. Más concretamente, si $U(n, 0) = 0$, la operación U se denomina *uninorma conjuntiva discreta*, mientras que si $U(n, 0) = n$, se denomina *uninorma disyuntiva discreta.*

En este trabajo se investiga el U-Modus Tollens para la familia de uninormas discretas en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ y la familia de uninormas discretas idempotentes $\mathcal{U}_{ide}$(aquellas que satisfacen $U(x, x) = x$ para todo $x \in L_n$) [10].

Definición 2. *[11] Una aplicación $I : L_n \times L_n \to L_n$ se denomina implicación difusa discreta, o simplemente implicación discreta, si satisface las siguientes condiciones:*

(I1) $I(x, z) \geq I(y, z)$ *si* $x \leq y$*, para todo* $z \in L_n$*.*
(I2) $I(x, y) \leq I(x, z)$ *si* $y \leq z$*, para todo* $x \in L_n$*.*
(I3) $I(0, 0) = I(n, n) = n$*, e* $I(n, 0) = 0$*.*

Definición 3. *Una negación en una cadena finita L_n es una función $N : L_n \to L_n$ que es decreciente y satisface las condiciones de contorno $N(0) = n$ y $N(n) = 0$. Dicha negación se denomina* negación fuerte *cuando es involutiva, es decir, cuando $N(N(x)) = x$ para todo $x \in L_n$.*

Un primer resultado que nos permite conocer qué tipo de uninormas debemos considerar para estudiar esta regla de inferencia es el siguiente: El siguiente resultado muestra una condición necesaria para que una uninorma discreta U satisfaga la regla de U-*Modus Tollens* en el marco discreto.

Proposición 1. *Sea I una implicación discreta y N una negación definidas sobre la cadena finita L_n tales que el par (I, N) satisface el U-Modus Tollens. Entonces, la uninorma discreta U debe ser conjuntiva.*

A continuación se describe la estructura esencial de aquellas uninormas discretas en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ para las cuales se verifica el U-Modus Tollens, bajo las hipótesis de que N es estrictamente decreciente en $(0, e)$ y que I satisface el principio de neutralidad (NP), $I(n, y) = n$ para todo $y \in L_n$.

Teorema 1. *Sea I una función de implicación discreta que satisface (NP), y sea $U = \langle T_U, e, S_U\rangle_{\text{mín}}$ una uninorma discreta de la clase $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, con elemento neutro $e \in L_n \setminus \{0, n\}$. Supongamos además que N es una negación en L_n estrictamente decreciente en el intervalo $(0, e)$. Entonces, el par (I, N) satisface la propiedad de U-Modus Tollens si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) $U(N(y), I(e, y)) = 0$ *para todo* $y \in L_n$.
(ii) $N(x) = 0$ *para todo* $x \geq e$, *y* $N(x) < e$ *siempre que* $x > 0$.
(iii) $I(x, y) < e$ *para todo* $y < x < e$.
(iv) Las funciones I' y N' satisfacen la propiedad de Modus Tollens respecto a T_U para todo $y < x \leq e$, donde la implicación modificada $I' : [0, e] \times [0, e] \to [0, e]$ y la negación ajustada $N' : [0, e] \to [0, e]$ vienen dadas por:

$$I'(x, y) = \begin{cases} e & \text{si } x \leq y, \\ I(x, y) & \text{si } y < x, \end{cases} \tag{1}$$

$$N'(x) = \begin{cases} N(x) & \text{si } x > 0, \\ e & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Con el fin de caracterizar las soluciones en este contexto de RU-implicaciones inducidas por uninormas discretas de la familia de $U_{\text{mín}}$, se consideraron tres casos distintos teniendo en cuenta la relación entre los elementos neutros e y e_0. En este documento, abordamos el caso en el que $e = e_0$.

Teorema 2. *Sea I_{U_0} la RU-implicación asociada a la uninorma discreta $U_0 \equiv \langle T_{U_0}, e_0, S_{U_0}\rangle_{\text{mín}}$, sea N una negación en una cadena finita, y sea $U \equiv \langle T_U, e, S_U\rangle$ una uninorma conjuntiva discreta con $e = e_0$ como elemento neutro. Entonces, que el par (I_{U_0}, N) satisfaga la propiedad de U-Modus Tollens es equivalente al cumplimiento de la siguiente condición:*

(i) $U(N(y), y) = 0$ *y* $U(N(y), n) = N(y)$ *para todo* $y \leq e - 1$.
(ii) $N(x) < e$ *para todo* $x > 0$, *y* $N(x) = 0$ *para todo* $x \geq e$.

(iii) La implicación residual $I_{T_{U_0}}$, junto con la negación modificada N' definida en la Ecuación (2)*, satisface la propiedad de Modus Tollens con respecto a la t-norma T_U, para todo $y < x$.*

Para *RU*-implicaciones generadas por uninormas idempotentes, se han obtenido tres resultados principales, de los que se enunciará uno de ellos en este trabajo.

Teorema 3. *Sea $U_0 \equiv \langle g, e_0 \rangle_{ide}$ una uninorma idempotente discreta con elemento neutro $e_0 \in L_n$ tal que $\bar{g}$ es una negación en L_n. Sea N una negación que tiene e_0 como punto fijo, y sea U una uninorma discreta cuyo elemento neutro coincide con $e = e_0$. Entonces, que el par (I_{U_0}, N) satisfaga la propiedad de U-Modus Tollens es equivalente al cumplimiento de las siguientes condiciones:*

(i) $\bar{g}(x) \leq N(x)$ *para todo* $x \in L_n$.
(ii) $U(N(x), g(x)) = N(x)$ *para todo* $x \leq e_0$.
(iii) $U(N(x), x) = N(x)$ *para todo* $x \geq e_0$.
(iv) $U(N(y), y) \leq N(x)$ *siempre que* $y \leq g(x) \leq e_0 \leq x$.

3. Agradecimientos

Los autores quieren agradecer el apoyo del *Programa de Foment de la Recerca i la Innovació de la Universitat de les Illes Balears 2024-2026.*

Referencias

1. Zadeh, L.A.: Fuzzy sets. Information and Control 8(3), 338–353 (1965)
2. Trillas, E., Mas, M., Monserrat, M., Torrens, J.: On the representation of fuzzy rules. Int. J. Approx. Reason. 48(2), 583–597 (2008)
3. Trillas, E., Alsina, C., Pradera, A.: On MPT-implication functions for fuzzy logic. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. 98, 259–271 (2004)
4. Hájek, P.: Metamathematics of Fuzzy Logic. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1998)
5. Aguiló, I., Riera, J.V., Suñer, J., Torrens, J.: Modus Tollens with respect to uninorms: U-Modus Tollens. Int. J. Approx. Reason. 127, 54–69 (2020)
6. De Baets, B., Fodor, J., Ruiz-Aguilera, D., Torrens, J.: Idempotent uninorms on finite ordinal scales. Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowl.-Based Syst. 17(1), 1–14 (2009)
7. Mas, M., Mayor, G., Torrens, J.: t-Operators and uninorms on finite totally ordered sets. Int. J. Intell. Syst. 14(9), 909–922 (1999)
8. Munar, M., Couceiro, M., Massanet, S., Ruiz-Aguilera, D.: A survey on the enumeration of classes of logical connectives and aggregation functions defined on a finite chain, with new results. Fuzzy Sets Syst. 490, 109023 (2024)
9. Aguiló, I., Fuster-Parra, P., Riera, J.V.: Modus Tollens in the Setting of Discrete Uninorms. Axioms 15(1), 77 (2026)
10. De Baets, B., Fodor, J., Ruiz-Aguilera, D., Torrens, J.: Idempotent uninorms on finite ordinal scales. Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowl.-Based Syst. 17(1), 1–14 (2009)
11. Mas, M., Monserrat, M., Torrens, J.: S-implications and R-implications on a finite chain. Kybernetika 40(1), 3–20 (2004)