# Agregación y descomposición de estructuras algebraicas basadas en álgebras multiadjuntas*

Roberto G. Aragón[1] y Celia Cordovilla[12] y Jesús Medina[1]

[1] Departmento de Matemáticas. Universidad de Cádiz. España
{roberto.aragon,jesus.medina}@uca.es, celia.cordovillasanchez@alum.uca.es
[2] Departmento de Álgebra. Universidad de Granada. España
ccordovilla@ugr.es

**Resumen** El principal objetivo de la tesis doctoral en cuestión es desarrollar nuevas construcciones de sumas ordinales de operadores sobre estructuras ordenadas generales, analizar la preservación de propiedades asociadas a implicaciones difusas, así como su aplicación en sistemas distribuidos y en computación en el borde, que requieren de sólidos fundamentos matemáticos para llevar a cabo procedimientos computacionales sólidos y robustos.
También se quiere caracterizar cuándo un operador arbitrario se puede escribir analíticamente como una suma ordinal de operadores locales.
Las principales estructuras base que se considerarán serán conjuntos parcialmente ordenados, en general, y retículos, en particular, flexibilizando el requerimiento del orden lineal usualmente impuesto en la bibliografía.
Además, los resultados obtenidos se estudiarán desde la perspectiva del Análisis de Conceptos Formal y se aplicarán a bases de datos reales.

**Keywords:** Suma Ordinal · Agregación · Implicación Difusa · Análisis de Conceptos Formales · Marco Multiadjunto

## 1. Datos de la propuesta

| | |
|---|---|
| Doctoranda | Celia Cordovilla Sánchez |
| Título propuesto | Agregación y descomposición de estructuras algebraicas basadas en álgebras multiadjuntas |
| Directores | Dr. Roberto García Aragón y Dr. Jesús Medina Moreno |
| Departamento | Departamento de Matemáticas |
| Universidad | Universidad de Cádiz |
| Fecha de inicio | Enero de 2025 |
| Defensa prevista | 2029 |
| Correo electrónico | ccordovilla@ugr.es |

* Parcialmente financiado por el proyecto PID2022-137620NB-I00 con el apoyo de MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y FEDER, UE, proyecto FEDER-UCA-2024-A2-04 con el apoyo de Programa Operativo FEDER Andalucía 2021-2027 y de Consejería de Universidad, Investigación e Innovación, Junta de Andalucía.

## 2. Resumen del trabajo de investigación

Este trabajo de investigación se centra en el estudio de mecanismos de agregación y descomposición de estructuras algebraicas ordenadas y de operadores definidos sobre ellas. Las estructuras algebraicas tratadas hasta ahora se construyen principalmente sobre retículos (en muchas ocasiones completos y lineales) y este trabajo se centrará en estructuras parcialmente ordenadas, puesto que esto permite modelar de forma más flexible las bases de datos.

La necesidad actual de ciertos paradigmas tecnológicos relevantes como es la computación en el borde (*edge computing*, en inglés) reside, entre otros factores, en poder procesar datos de forma local sin tener que compartir información sensible con el sistema de almacenamiento global reduciendo a su vez la latencia. Esto requiere el uso de herramientas matemáticas que permitan diseñar sistemas inteligentes robustos, confiables y trazables con estas características. Para este fin, es necesario desarrollar técnicas de agregación y descomposición tanto de estructuras algebraicas como de operadores definidos sobre estas.

En este trabajo, se va a considerar la filosofía de Clifford para introducir suma ordinales de estructuras generales, extendiendo los enfoques previos de operadores sobre conjuntos totalmente ordenados [29,30,33]. Específicamente, se consideran conjuntos parcialmente ordenados (*posets*, de su abreviación del inglés) arbitrarios y se procede del siguiente modo: en primer lugar, es necesario caracterizar los operadores definidos sobre posets para determinar condiciones bajo las que dicho operador se pueda descomponer en una suma ordinal, extendiendo el trabajo realizado en [18] donde se analizó dicha suma haciendo uso de normas triangulares (t-normas) definidas sobre el intervalo unidad. Los trabajos previos sobre sumas ordinales de posets basadas en retículos [23], así como sus extensiones a t-normas y operadores arbitrarios [22,4], han demostrado que es posible construir estructuras globales a partir de estructuras locales preservando determinadas propiedades algebraicas. Además, resultados recientes como [4], muestran que propiedades relevantes, como la continuidad por la izquierda, pueden preservarse cuando esta se le asume a los operadores locales. Esta propiedad es de gran importancia debido a que un operador continuo a izquierda induce una implicación residuada. Sin embargo, no se ha estudiado el proceso inverso aún y este será uno de los objetivos a estudiar, que partirá de la caracterización previa realizada sobre un operador arbitrario. Los operadores de implicación tienen una importancia particular porque forman parte fundamental de los motores del razonamiento aproximado, inductivo y deductivo. Tradicionalmente, las implicaciones que se han considerado son aquellas definidas en el intervalo unidad [7,8,9,24], pero en este trabajo se propone llevarlas a conjuntos parcialmente ordenados, en general, y a retículos arbitrarios, en particular.

Otro objetivo que se persigue es estudiar si la implicación residuada inducida por el operador global coincide con la suma ordinal de cada una de las implicaciones residuadas, inducidas por los operadores que intervienen en la suma ordinal del operador global. Por último, se pretende aplicar toda esta teoría al análisis de conceptos formales (FCA, de sus siglas en inglés) [25] con el fin de definir operadores de formación de conceptos en el caso difuso sobre las nuevas

estructuras en un marco multiadjunto, extendiendo [28]. Como consecuencia, se podrá aplicar una estrategia de cálculo local para mejorar la gestión de información en dispositivos locales, reducir la latencia, evitar el envío masivo de datos a servidores centrales y aumentar la privacidad y seguridad al no compartir datos personales innecesariamente.

## 3. Antecedentes y estado actual del tema

La computación en el borde y los sistemas distribuidos son claros ejemplos actuales de la necesidad de trabajar de forma local, cerca del lugar donde se generan los datos para obtener información del sistema global. Por lo tanto, es necesario adaptar las distintas herramientas matemáticas a estas situaciones. Para esto es fundamental estudiar la estructura algebraica que puede surgir a partir de las distintas estructuras locales, así como la forma de combinarlas en el sistema global. Estas nuevas estructuras necesitan un rango de valores suficientemente amplio para poder afrontar todas las casuísticas que puedan surgir al examinar el problema a estudiar. Muchos de estos valores pudieran ser incomparables como ocurre cuando se considera la lógica de cuatro valores de Belnap [10]. Además, cada vez es más clara la necesidad de que los operadores definidos en cada estructura local sean flexibles y no restringirse al uso de ciertos operadores como por ejemplo las normas triangulares (t-normas). El enfoque presentado en [23] introdujo un mecanismo que adapta la conocida suma ordinal de t-normas a la estructura de sumas de conjuntos parcialmente ordenados y retículos, con un énfasis en la preservación de sus propiedades fundamentales. A dicho método se le denominó suma basada en retículos.

Posteriormente, en [22] se analizó la extensión de t-normas a la familia de retículos. No obstante, como se mencionó anteriormente, en aplicaciones prácticas es interesante considerar operadores más flexibles, por ejemplo, no requiriendo propiedades como la asociatividad, la cual en ciertos contextos puede limitar su utilidad. Es por ello que en [4] se introdujo la definición de suma de retículos en general junto con el estudio sobre qué propiedades específicas se conservan. Entre estas propiedades cabe resaltar la de continuidad a izquierda de los operadores locales, que es fundamental para obtener implicaciones residuadas. Esta nueva suma de retículos en general proporciona la conservación de la citada propiedad, lo cual permite que el operador global admita una implicación residuada.

Por otro lado, se aborda el estudio de las implicaciones difusas. En la lógica difusa, una de las operaciones más importantes es la implicación difusa, ya que es esencial para el razonamiento aproximado, al igual que lo es la implicación clásica para la lógica clásica. Los condicionales difusos, así como el razonamiento inductivo o deductivo se llevan a cabo mediante implicaciones difusas. Además, estas son muy útiles en otras aplicaciones como las ecuaciones de relaciones difusas, la morfología matemática difusa, las medidas difusas y el procesamiento de imágenes. La relevancia de las implicaciones difusas se desprende claramente de las aplicaciones mencionadas. Las implicaciones difusas usualmente estudiadas son aplicaciones sobre el intervalo unidad que generalizan el concepto de

implicación en la lógica clásica. Estas suelen derivar de t-normas, t- conormas o negaciones fuertes. A saber, dada una t-norma continua a izquierda la implicación que se deriva a partir de esta se denomina implicación residuada o R-implicación. Las R-implicaciones han sido ampliamente estudiadas en la literatura, caracterizando aquellas que cumplen determinadas propiedades como el principio de ordenación e intercambio [6], las que derivan de uninormas se han estudiado con detalle en [31], las que derivan de una clase de funciones de agregación no asociativas han sido analizadas en [13]. La mayoría de los estudios relacionados con estas implicaciones se han desarrollado en el marco del intervalo unidad, lo que motiva realizar un estudio de las implicaciones en un marco más genérico, como por ejemplo en retículos arbitrarios, cuyo estudio es muy incipiente. Para ello es necesario adaptar el concepto de R-implicación obtenida de una t-norma [26] al de R-implicación obtenida a partir de un operador cuyo dominio sea un retículo cualquiera, y por lo tanto, también lo será del de la implicación.

Estos desarrollos formales en teoría de retículos se aplicarán en la teoría matemática conocida como análisis de conceptos formales (FCA). Esta teoría, introducida en 1982 por R. Wille and B. Ganter [25,32], identifica estructuras de conceptos entre distintos conjuntos de datos. Una de las extensiones más versátiles y estudiadas es la extensión difusa basada en la metodología multiadjunta. Esta extensión posee una gran flexibilidad para modelar y adaptar situaciones reales complejas, pudiéndose aplicar en diversos campos como, por ejemplo, en la gestión eficiente de infraestructuras de energía renovables. Esta extensión se basa en retículos de conceptos multiadjuntos [28], que aplican el paradigma multiadjunto para ofrecer un marco general que engloba distintos enfoques difusos. Esta filosofía también se ha aplicado con éxito en áreas como los conjuntos rugosos difusos, las ecuaciones de relaciones difusas o la programación lógica difusa. En este contexto, los operadores llamados triples adjuntos [15,17,20] permiten manejar ambientes no conmutativos y no asociativos, lo que facilita asignar diferentes grados de preferencia a objetos y atributos.

Otro reto importante en FCA es la reducción de la complejidad ya sea disminuyendo el número de atributos y objetos o simplificando el retículo de conceptos sin perder información esencial dentro del paradigma multiadjunto [1,16,18,19]. Para ello, se han propuesto estrategias como el uso de umbrales [3,5], intensificadores [14], computación granular o detección de clases o particiones de los datos iniciales. Un enfoque reciente, inspirado en la Teoría de Conjuntos Rugosos, muestra que al reducir atributos se generan relaciones de equivalencia entre conceptos, cuyas clases forman subsemirretículos superiores [11,12]. Sin embargo, las reducciones basadas en congruencias de retículos pueden eliminar demasiada información. Por eso, se estudian nociones más flexibles, como exigir únicamente que las clases de equivalencia sean subretículos convexos, lo que permitiría estructuras algebraicas útiles sin tanta pérdida informativa [1]. Estos análisis también se extienden al caso difuso multiadjunto, evaluando qué información se modifica respecto al contexto original [2]. Siguiendo la motivación inicial, es necesario adaptar los resultados obtenidos de forma global, sobre la base de da-

tos original, al estudio de las bases de datos locales y qué propiedades pueden preservarse en el global, así como el camino inverso, analizar las características de la global que se preservan en las locales.

## 4. Objetivos

En la situación descrita anteriormente, la caracterización de los operadores definidos en el sistema global para ser una suma ordinal de familias de operadores supone un reto de gran relevancia para poder analizar la información de forma local, es decir, la idea se basa en llevar a cabo el estudio recíproco que se realizó en [4]. Además, se pretende enfocar el trabajo en el estudio de operadores que cumplen la propiedad de continuidad a izquierda, pues permite la existencia de las implicaciones residuadas [21,27]. Estas implicaciones son de gran relevancia dado que permiten deducir información. La deducción de información en la lógica clásica se sigue de la regla conocida como modus ponens, y es Peter Hájek, quién inicialmente extiende esta regla a la lógica difusa. En este trabajo de investigación se pretende avanzar en esta línea para mejorar los estudios actuales enla la s el ambiente difuso. Por ejemplo, se introducirá la definición de suma ordinal de implicaciones extendiendo la presentada en [33], junto con el estudio de las propiedades más relevantes que puedan satisfacer dichas implicaciones.

En relación con el análisis de conceptos formales lo que se persigue en esta línea es detectar variables o atributos superfluos y las más representativas de un contexto, con el fin de analizar el comportamiento de dichas variables cuando se realice una reducción de atributos de forma local (en subcontextos), así como conocer qué información se preserva en el contexto final. Los desarrollos obtenidos serán fundamentales en distintas líneas de investigación actuales en inteligencia artificial, puesto que se podrá aprovechar mejor la capacidad de los dispositivos locales para gestionar la información de manera más eficiente, mejorando la velocidad en la transmisión de datos y evitando la necesidad de enviarlos a un dispositivo central compartido por varios participantes. Esto puede reducir la latencia y mejorar la eficiencia general del sistema. Una ventaja adicional que se puede apreciar es la no compartición de datos (personales), lo que implica un mayor control sobre la privacidad y seguridad de la información. De ahí, la necesidad de conocer cómo se comportan las variables a nivel local, y a partir de la relevancia de las variables estudiar cómo debería ser el global y viceversa. Un objetivo importante para este fin será el definir y estudiar los operadores de formación de conceptos en el caso difuso a partir de los operadores de implicación obtenidos como sumas ordinales de implicaciones locales.

El objetivo principal es desarrollar nuevas construcciones de sumas ordinales de operadores sobre estructuras ordenadas generales y analizar la preservación de propiedades asociadas a implicaciones difusas. Este objetivo se desglosa en los siguientes subobjetivos:

1. Introducir una nueva construcción de suma ordinal para familias de operadores definidos sobre conjuntos parcialmente ordenados, extendiendo las propuestas existentes en la literatura.

2. Analizar la preservación de propiedades relevantes, tales como condiciones de frontera, monotonía, principio del orden, continuidad por la izquierda y propiedades características de las implicaciones difusas, para poder establecer que dicha suma se corresponda con un operador de implicación difusa.
3. Caracterizar las condiciones bajo las cuales un operador puede descomponerse mediante una suma ordinal.
4. Estudiar la relación entre la suma de las implicaciones residuadas inducidas por los operadores locales continuos a izquierda y la implicación residuada asociada al operador global, resultante de la suma de los operadores locales.
5. Explorar aplicaciones de los resultados obtenidos al análisis de conceptos formales difuso y a entornos de computación distribuida.
6. Estudiar la relación entre las variables representativas y superfluas a nivel local y global de un sistema de información dado. Identificarlas en los dispositivos locales con el fin de optimizar el rendimiento y la eficiencia en la gestión de los datos.

La principal aportación original de esta investigación consiste en extender las construcciones de suma ordinal existentes a operadores generales definidos sobre conjuntos parcialmente ordenados, así como en el estudio sistemático de las propiedades de implicación difusa preservadas por dichas construcciones. Este enfoque permite ampliar significativamente el marco clásico de las implicaciones difusas y proporciona nuevas herramientas para el tratamiento de datos en el FCA.

## 5. Metodología y Plan de Trabajo

La metodología propuesta para esta tesis se fundamenta en un ciclo de investigación científica que se divide en las siguientes partes:

1. Estudio de las referencias más significativas asociadas a la temática de la tesis doctoral.
2. Asistencia a seminarios y congresos relacionados con el tema a investigar.
3. Estancia en centros de investigación de reconocido prestigio.
4. Relaciones con empresas para aplicar las técnicas desarrolladas a bases de datos reales.
5. Diseño y elaboración de artículos para congresos y revistas de investigación.

Con la realización de todos estos pasos se conseguirá alcanzar todos los objetivos propuestos en la primera sección, siguiendo un plan de trabajo acorde a metodología. El Plan de Trabajo propuesto se desarrolla en torno a los siguientes hitos de cumplimiento:

- Hito 1 (Finalizado): Recopilación bibliográfica exhaustiva con la que se lleva a cabo un estudio profundo de la lógica clásica y sus extensiones difusas, con especial énfasis en las álgebras multiadjuntas y el FCA. Así como, analizar mecanismos previos como la suma de t-normas basada en retículos y la filosofía de Clifford para la suma ordinal de estructuras.

- Hito 2 (En curso): Redacción de un primer artículo científico sobre la construcción de una suma ordinal implicacional de operadores con lo que se consigue alcanzar los objetivos 1 y 2.
- Hito 3 (Fase intermedia): Definición formal de la suma ordinal de implicaciones residuadas y redacción de un segundo artículo analizando si una implicación residuada global obtenida de la suma de operadores continuos a izquierda puede coincidir con la suma de implicaciones residuadas locales. Este segundo hito conlleva alcanzar el cuarto objetivo.
- Hito 4 (Fase Intermedia): Caracterización del proceso inverso llevado a cabo en [4], es decir, determinar condiciones necesarias para que un operador global pueda descomponerse en una suma ordinal de operadores locales. Con lo que se logrará desarrollar el objetivo 3.
- Hito 5 (Fase Final): Aplicación de los resultados al FCA difuso, definiendo nuevos operadores de formación de conceptos en entornos difusos basados en las sumas ordinales desarrolladas. Con lo cual se consiguen los objetivos 5 y 6.

Durante el transcurso de este plan de trabajo también se contempla la asistencia a seminarios internacionales, la realización de una estancia en centros de investigación de prestigio y el contacto con empresas para validar las técnicas matemáticas en bases de datos reales.

## 6. Relevancia

La relevancia científica de este trabajo radica en la necesidad de adaptar las herramientas matemáticas de la lógica y el álgebra a los desafíos planteados por la computación en el borde (*edge computing*) y la gestión de datos en entornos distribuidos, entre otros ejemplos. Actualmente, la capacidad de procesar información cerca del lugar donde se generan los datos no es solo una cuestión de eficiencia, sino un requisito indispensable para garantizar la privacidad y seguridad de los datos sensibles, evitando su envío innecesario a servidores centrales y reduciendo significativamente la latencia del sistema. Es por ello, que se necesitan modelos matemáticos que desarrollen esta transición. Para lograrlo, es fundamental profundizar en el estudio de mecanismos formales que permitan la agregación y descomposición de estructuras algebraicas, especialmente aquellas construidas sobre retículos y posets, los cuales ofrecen una mayor flexibilidad que las estructuras totalmente ordenadas, para modelar bases de datos en comparación con las estructuras clásicas.

Esta investigación se sitúa en una línea actual e innovadora al adoptar la filosofía de Clifford para introducir sumas ordinales de estructuras generales, extendiendo de manera significativa los enfoques previos que se limitaban a operadores definidos sobre conjuntos totalmente ordenados.

Científicamente, el trabajo cobra gran importancia al proponer el estudio de operadores en un marco mucho más genérico que el tradicional intervalo unidad, desplazando el análisis hacia conjuntos parcialmente ordenados y retículos

arbitrarios. Este cambio es necesario para afrontar casuísticas reales donde los valores de verdad o de datos pueden ser incomparables, permitiendo la integración de lógicas más robustas, como la lógica de cuatro valores de Belnap [10], que previene que pequeñas inconsistencias en la información generen conclusiones irrelevantes. La relevancia académica reside, por tanto, en la caracterización de estos operadores para determinar bajo qué condiciones una estructura (operador) global puede descomponerse en una suma ordinal de estructuras (operadores) locales, un reto que implica un análisis bidireccional sobre la preservación de propiedades fundamentales como la monotonía o continuidad a izquierda.

Uno de los puntos más importantes de este trabajo es el estudio de la última propiedad mencionada, la continuidad a izquierda, ya que si un operador la cumple, este induce una implicación residuada o R-implicación. Estas implicaciones constituyen el motor fundamental del razonamiento aproximado, inductivo y deductivo en los sistemas de inteligencia artificial. Las R-implicaciones han sido ampliamente estudiadas en la literatura, caracterizando aquellas que cumplen determinadas propiedades como el principio de ordenación e intercambio [6], las que derivan de uninormas se han estudiado con detalle en [31], las que derivan de una clase de funciones de agregación no asociativas han sido analizadas en [13].

La relevancia de las implicaciones difusas se desprende claramente de su aplicación en su aplicación sobre las ecuaciones de relaciones difusas, la morfología matemática difusa, las medidas difusas y el procesamiento de imágenes. La importancia de avanzar en este campo se hace evidente al considerar que, es sabido ya que la continuidad a izquierda se preserva desde los operadores locales al global, pero el estudio del proceso inverso no, y es uno de los objetivos impuestos en este trabajo. Ya que esto permitiría que, dada una estructura global en cual hay definida un operador continuo a izquierda, este induce una implicación residuada y así se obtiene un mecanismo de inferencia que permita establecer relaciones y deducciones entre los datos de dicha estructura.

También es importante transferir toda esta teoría al ámbito del FCA difuso bajo el marco multiadjunto [28]. Esta extensión posee una gran flexibilidad para modelar y adaptar situaciones reales complejas, pudiéndose aplicar en diversos campos como, por ejemplo, en la gestión eficiente de infraestructuras de energía renovables. Esta filosofía también se ha aplicado con éxito en áreas como los conjuntos rugosos difusos, las ecuaciones de relaciones difusas o la programación lógica difusa. En este contexto, los operadores llamados triples adjuntos permiten manejar ambientes no conmutativos y no asociativos, lo que facilita asignar diferentes grados de preferencia a objetos y atributos. Algunos artículos como [17] han estudiado el caso no conmutativo.

Finalmente, la relevancia de esta investigación se ve respaldada por su integración en proyectos de alto impacto como:


- Título del proyecto: MOONRISE: Herramientas matemáticas para el razonamiento no canónico y sistemas inteligentes
  Entidad Financiadora: Ministerio de Ciencia e Innovación
  Convocatoria: Proyectos De Generación de Conocimiento 2022
  Referencia PID2022-137620NB-I00

Duración desde: 1/09/2023, hasta: 31/08/2027
Investigadores Principales: Jesús Medina Moreno, Eloísa Ramírez Poussa

- Título del proyecto: MENTALITY: MatEmáticas para uNa TrAnsición digitaL, InteligenTe Y verde (MENTALITY: Mathematics for a digital, intelligent, and green transition)
  Entidad Financiadora: Proyectos de I+D+I en el marco del Programa Operativo FEDER Andalucía 2021-2027.
  Referencia: FEDER-UCA-2024-A2-04
  Duración desde: 15/09/2025, hasta: 14/09/2027
  Investigadores Principales: Jesús Medina Moreno, Nicolás Madrid Labrador

que buscan desarrollar matemáticas específicas para una transición digital, inteligente y sostenible. La capacidad de optimizar el rendimiento y la eficiencia en la gestión de datos mediante la descomposición algebraica no solo mejora la velocidad de transmisión, sino que contribuye a un modelo tecnológico más sostenible y respetuoso con la soberanía del usuario sobre sus propios datos personales.

En conclusión, la importancia de esta tesis radica en su capacidad para unir la abstracción matemática de la teoría de retículos con las aplicaciones prácticas más exigentes de la inteligencia artificial moderna, proporcionando un soporte formal robusto para los sistemas inteligentes del futuro.

## Referencias

1. R. G. Aragón, J. Medina, and E. Ramírez-Poussa. Reducing concept lattices by means of a weaker notion of congruence. *Fuzzy Sets and Systems*, 418:153–169, 2021. Algebra.
2. R. G. Aragón, J. Medina, and E. Ramírez-Poussa. Impact of local congruences in variable selection from datasets. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 404:113416, 2022.
3. R. G. Aragón, J. Medina, and E. Ramírez-Poussa. Decomposition of contexts into independent subcontexts based on thresholds. *Computational and Applied Mathematics*, 44:340, 2025.
4. R. G. Aragón, P. Jara, and J. Medina. Operators on lattice-based sums. general and left-continuous conjunctors. *Fuzzy Sets and Systems*, 528, 2025.
5. R. G. Aragón, J. Medina, and E. Ramírez-Poussa. Independent subcontexts and blocks of concept lattices. definitions and relationships to decompose fuzzy contexts. *Fuzzy Sets and Systems*, 509:109345, 2025.
6. M. Baczyński. Residual implications revisited. notes on the smets–magrez theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 145(2):267–277, 2004.
7. M. Baczyński, P. Drygaś, A. Król, and R. Mesiar. New types of ordinal sum of fuzzy implications. In *2017 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pages 1–6. IEEE, 2017.
8. M. Baczyński, P. Drygaś, A. Król, and P. Pusz. Developing idea of ordinal sum of fuzzy implications. In *2020 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pages 1–7. IEEE, 2020.

9. M. Baczyński and B. Jayaram. Fuzzy implications from fuzzy logic operations. In *Fuzzy Implications*, pages 39–107. Springer, 2008.
10. N. D. Belnap Jr. A useful four-valued logic. In *Modern uses of multiple-valued logic*, pages 5–37. Springer, 1977.
11. M. J. Benítez-Caballero, J. Medina, E. Ramírez-Poussa, and D. Ślęzak. A computational procedure for variable selection preserving different initial conditions. *International Journal of Computer Mathematics*, 97(1-2):387–404, 2020.
12. M. J. Benítez-Caballero, J. Medina, E. Ramírez-Poussa, and D. Ślęzak. Rough-set-driven approach for attribute reduction in fuzzy formal concept analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 391:117–138, 2020. Computer Science.
13. M. Carbonell and J. Torrens. Continuous r-implications generated from representable aggregation functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 161(17):2276–2289, 2010.
14. M. E. Cornejo, J. Medina, and F. J. Ocaña. Theories, models and bases of attribute implications in multi-adjoint concept lattices with hedges. *Computational and Applied Mathematics*, 45(1):30, 2025.
15. M. E. Cornejo, J. Medina, and E. Ramírez-Poussa. A comparative study of adjoint triples. *Fuzzy Sets and Systems*, 211:1–14, 2013.
16. M. E. Cornejo, J. Medina, and E. Ramírez-Poussa. Attribute reduction in multi-adjoint concept lattices. *Information Sciences*, 294:41 – 56, 2015.
17. M. E. Cornejo, J. Medina, and E. Ramírez-Poussa. Multi-adjoint algebras versus non-commutative residuated structures. *International Journal of Approximate Reasoning*, 66:119–138, 2015.
18. M. E. Cornejo, J. Medina, and E. Ramírez-Poussa. Characterizing reducts in multi-adjoint concept lattices. *Information Sciences*, 422:364–376, 2018.
19. M. E. Cornejo, J. Medina, and E. Ramírez-Poussa. Attribute and size reduction mechanisms in multi-adjoint concept lattices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 318:388 – 402, 2017.
20. M. E. Cornejo, J. Medina, and E. Ramírez-Poussa. Algebraic structure and characterization of adjoint triples. *Fuzzy Sets and Systems*, 425:117–139, 2021.
21. F. Durante, E. P. Klement, R. Mesiar, and C. Sempi. Conjunctors and their residual implicators: characterizations and construction methods. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 4(3):343–356, 2007.
22. M. El-Zekey. Lattice-based sum of t-norms on bounded lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 386:60–76, 2020.
23. M. El-Zekey, J. Medina, and R. Mesiar. Lattice-based sums. *Information Sciences*, 223:270–284, 2013.
24. H. Frazao, L. Santiago, J. Pinheiro, T. Milfont, and A. Canuto. Two classes of ordinal sum implications. *Computational and Applied Mathematics*, 43(4):220, 2024.
25. B. Ganter and R. Wille. *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations*. Springer, 2 edition, 2024.
26. B. Jayaram and M. Baczynski. Continuous r-implications. In J. P. Carvalho, D. Dubois, U. Kaymak, and J. M. da Costa Sousa, editors, *Proceedings of the Joint 2009 International Fuzzy Systems Association World Congress and 2009 European Society of Fuzzy Logic and Technology Conference, Lisbon, Portugal, July 20-24, 2009*, pages 277–281, 2009.
27. J. Kalafut and A. Mesiarová-Zemánková. Decomposition of pseudo-uninorms with continuous underlying functions via ordinal sum. *Information Sciences*, 690:121573, 2025.
28. J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and J. Ruiz-Calviño. Formal concept analysis via multi-adjoint concept lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(2):130–144, 2009.

29. A. Mesiarová-Zemánková. Ordinal sums of representable uninorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 308:42–53, 2017. Theme: Aggregation Operations.
30. Y. Ouyang, H.-P. Zhang, and B. De Baets. Ordinal sums of triangular norms on a bounded lattice. *Fuzzy Sets and Systems*, 408:1–12, 2021. Aggregation Operators.
31. D. Ruiz and J. Torrens. Residual implications and co-implications from idempotent uninorms. *Kybernetika*, 40(1):21–38, 2004.
32. R. Wille. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts. In *Ordered Sets*, pages 445–470. Springer Netherlands, 1982.
33. X. Yan and H. Zhou. Weak implications as ordinal sums of fuzzy implications and co-implications. *Information Sciences*, 718(122395), 2025.